UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2004

Blatt 3 Abgabetermin: Dienstag, 11.5.2004 vor der Vorlesung

Aufgabe 10 **(4 Punkte)**

Sei X ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) X ist separabel.

(b) X ist vollständig.

Aufgabe 11 **(4 Punkte)**

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $\emptyset \neq Y \subset X$ eine Teilmenge und d_Y die Relativmetrik von d auf Y. Zeigen Sie:

$$Y \subset X \text{ ist abgeschlossen} \quad \Leftrightarrow \quad (Y, d_Y) \text{ ist ein vollständiger metrischer Raum.}$$

Aufgabe 12 **(4 Punkte)**

Sei (X, t) ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

X ist kompakt $\Leftrightarrow$ Für jede Familie $(F_i)_{i \in I}$ abgeschlossener Mengen $F_i \subset X$ mit f.i.p. ist $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

Aufgabe 13 **(2+2=4 Punkte)**

Zeigen Sie:

(a) Sei (X, t) ein topologischer Raum und sei $M \subset X$. Dann ist:

$$\overline{M} = \{x \in X \; ; \; \exists \text{ Netz } (x_\alpha)_{\alpha \in A} \text{ in } M \text{ mit } \lim_{\alpha \in A} x_\alpha = x\} .$$

(b) Ein Netz in einem topologischen Produkt konvergiert genau dann, wenn es komponentenweise konvergiert.

Aufgabe 14 **(2+3+3=8 Punkte)**

Seien (X_i, t_i) $(i \in I)$ topologische Räume und sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ mit der Produkttopologie t versehen. Für jedes $i \in I$ sei $A_i \subset X_i$ eine nichtleere Teilmenge und $A = \prod_{i \in I} A_i \subset X$. Zeigen Sie:

(a) $A_i \subset X_i$ abgeschlossen für alle $i \in I \quad \Rightarrow \quad A \subset X$ abgeschlossen.
Gilt auch die umgekehrte Implikation?

(b) $\overline{A} \;=\; \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.

(c) $\mathrm{Int}(A) \;\subset\; \prod_{i \in I} \mathrm{Int}\,(A_i)$. Gilt Gleichheit? (Beweis oder Gegenbeispiel)