UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2004

Blatt 4 Abgabetermin: Dienstag, 18.05.2001, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 15 (4 Punkte)

(a) Sei $(X_n, d_n)_{n\geq 0}$ eine Folge metrischer Räume. Zeigen Sie, dass die Produkttopologie auf $X = \prod_{n=0}^{\infty}$ metrisierbar ist (das heißt, sie wird durch eine geeignete Metrik induziert).

(b) Zeigen Sie: Ein unendliches topologisches Produkt nichttrivialer normierter Räume ist niemals normierbar.

(Hinweis zu (b): Zeigen Sie, dass jede Nullumgebung im Produktraum einen nichttrivialen linearen Teilraum enthält.)

Eine Menge $B \subset E$ in einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum (E, t) heißt beschränkt*, falls zu jeder absolutkonvexen Nullumgebung $U \subset E$ ein $\delta > 0$ existiert mit $B \subset \delta U$.*

Aufgabe 16 (4 Punkte)

Seien E, F lokalkonvexe topologische Vektorräume und $T : E \to F$ linear. Zeigen Sie:

(a) T stetig $\Rightarrow$ T beschränkt (d.h. T bildet beschränkte Mengen in E auf beschränkte Mengen in F ab)

(b) Sei E ein Banachraum und τ_w die schwache Topologie auf E. Untersuchen Sie Stetigkeit und Beschränktheit der Abbildung $\mathrm{id} : (E, \tau_w) \to E$.

(Hinweis zu (b): Im Fall $\dim(E) = \infty$ enthält jede τ_w-Nullumgebung einen nichttrivialen Teilraum von E.)

Aufgabe 17 (4 Punkte)

Seien E, F lokalkonvexe topologische k-Vektorräume, $B \subset E$ und $T : E \to F$ linear. Zeigen Sie:

(a) B beschränkt $\Leftrightarrow$ für jede Folge (x_n) in B und jede Nullfolge (α_n) in k gilt $(\alpha_n x_n) \to 0$.

(b) T folgenstetig $\Rightarrow$ T beschränkt (im Sinne von Aufgabe 1).

Aufgabe 18 **(5 Punkte)**

Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und seien $A, B, M_1, ..., M_r \subset E$. Zeigen Sie:

(a) A beschränkt $\Rightarrow \overline{\Gamma(A)}$ beschränkt

(b) A, B beschränkt $\Rightarrow A + B$ beschränkt

(c) A kompakt $\Rightarrow A$ beschränkt

(d) $M_1, ..., M_r$ absolutkonvex $\Rightarrow$

$$\Gamma(M_1 \cup ... \cup M_r) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i \;\middle|\; \begin{array}{l} x_i \in M_i \text{ für } i = 1, ..., r \text{ und} \\ \alpha_1, ..., \alpha_r \in k \text{ mit } \sum_{i=1}^{r} |\alpha_i| \leq 1 \end{array} \right\}.$$

(e) $M_1, ..., M_r$ absolutkonvex und kompakt $\Rightarrow \Gamma(M_1 \cup ... \cup M_r)$ kompakt

---

Aufgabe 19* **(4 Punkte)**

Seien E, F lokalkonvexe topologische Vektorräume. Für alle $i \in I$ sei $A_i : E \to F$ eine stetige lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (i) Die Familie $(A_i)_{i \in I}$ ist punktweise beschränkt, d.h. für jedes $x \in E$ ist die Menge $\{A_i x; i \in I\}$ beschränkt in F.

  (ii) Für jede Nullumgebung $V \subset F$ ist die Menge $\bigcap_{i \in I} A_i^{-1}(V)$ absorbierend in E.

(b) Sei nun die Topologie auf E von einer vollständigen Metrik erzeugt. Die Familie $(A_i)_{i \in I}$ sei punktweise beschränkt. Zeigen Sie:
Für jede abgeschlossene, absolutkonvexe Nullumgebung $V \subset F$ ist $T := \bigcap_{i \in I} A_i^{-1}(V)$ eine Nullumgebung in E.

(c) Welcher Satz aus der FA I ist damit bewiesen?
(Hinweis zu b): Es gilt $E = \bigcup_{n \in N} nT$.)

(Hinweis zu (b): Satz von Baire)