UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2004

Blatt 5 Abgabetermin: Dienstag, 25.05.2004, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 20 **(1+2+2=5 Punkte)**

Sei E ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Zeigen Sie:

(a) Jedes konvergente Netz in E ist ein Cauchy-Netz.

(b) Jede Cauchy-Folge in E ist beschränkt. Gilt dies auch für Cauchy-Netze?

(c) Ist $K \subset E$ kompakt und $(x_i)_{i \in I}$ ein Cauchy-Netz in E mit $x_i \in K$ für alle $i \in I$, so ist $(x_i)_{i \in I}$ konvergent, und der Grenzwert liegt in K.

Aufgabe 21 **(4 Punkte)**

Sei E ein lokalkonvexer Hausdorffraum, $M \subset E$ absolutkonvex und kompakt. Dann gilt: $E_M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nM$ ist zusammen mit der durch $p_M(x) = \inf\{\varrho > 0; x \in \varrho M\}$ definierten Halbnorm ein Banachraum.

Aufgabe 22 **(4 Punkte)**

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $\mathcal{O}(U)$ versehen mit der durch das Halbnormensystem

$$p_K(f) = \sup_{z \in K} |f(z)| \qquad (K \subset U \text{ kompakt})$$

gegebenen metrisierbaren lokalkonvexen Topologie τ (siehe Vorlesung und Übung).

(a) Zeigen Sie: $M \subset \mathcal{O}(U)$ kompakt $\Leftrightarrow$ M ist abgeschlossen und beschränkt in $\mathcal{O}(U)$.

(b) Ist der Raum $(\mathcal{O}(U), \tau)$ normierbar?

(c) Zeigen Sie: Die Ableitung ist ein stetiger linearer Operator auf dem Raum $(\mathcal{O}(U), \tau)$.

(Hinweis zu (a): Satz von Montel.)

Aufgabe 23 **(4 Punkte)**

Sei E ein k-Vektorraum und $u : E \to k$ eine lineare Abbildung. Seien $p_1, ..., p_n$ Halbnormen auf E mit

$$|u(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \qquad (x \in E).$$

Zeigen Sie: Es existieren lineare Abbildungen $u_1, ..., u_n : E \to k$ mit $u = \sum_{i=1}^{n} u_i$ und

$$|u_i(x)| \leq p_i(x) \qquad (x \in E, i = 1, ..., n).$$

(Hinweis: Betrachten Sie die Halbnorm $p : E^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, ..., x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i)$, und identifizieren Sie E mit einem geeigneten Teilraum von E^n. Wenden sie dann den Satz von Hahn-Banach für Halbnormen an.)

Sei E ein k-Vektorraum. Man nennt eine absolut konvexe Menge $B \subset E$ eine *Banachkugel*, falls die Halbnorm

$$p_B : E_B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B\}$$

eine Norm auf E_B und (E_B, p_B) ein Banachraum ist.

Aufgabe 24* **(4 Punkte)**

Seien E, F lokalkonvexe Hausdorffräume, $T : E \to F$ stetig linear und $B \subset E$ absolut konvex. Zeigen Sie:

(a) $F_{TB} = TE_B$ und für die lineare Abbildung $T_B : E_B \to F_{TB}$, $x \mapsto Tx$ gilt

$$p_{TB}(Tx) = \inf\{p_B(x - y);\ y \in \ker T_B\}.$$

(b) Ist $B \subset E$ eine beschränkte Banachkugel, so ist $TB \subset F$ eine Banachkugel in F.