UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2004

Blatt 6 Abgabetermin: Dienstag, 01.06.2001, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 25 (4 Punkte)

Sei

$$s \ = \ \{x = (x_n)_{n\geq 1};\ x \text{ Folge in } \mathbb{C} \text{ mit } \|x\|_k = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| n^k < \infty \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}\ .$$

Zeigen Sie, dass s zusammen mit der von dem Halbnormensystem $(\|\cdot\|_k)_{k\in\mathbb{N}}$ erzeugten lokalkonvexen Topologie ein Fréchetraum ist.

Aufgabe 26 (2+2+2=6 Punkte)

Sei (E,τ) ein Fréchetraum und d eine translationsinvariante Metrik auf E, die die Topologie τ erzeugt. Sei $F \subset E$ ein abgeschlossener Teilraum und τ_q die Quotiententopologie von τ auf E/F. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$\varrho([x],[y]) = \inf\{d(x-y,z);\ z \in F\}$$

wird eine translationsinvariante Metrik ϱ auf E/F definiert.

(b) Die Quotientenabbildung $q : (E,d) \to (E/F,\varrho)$ ist stetig und offen. Schließen Sie, daß die Topologie τ_q von ϱ erzeugt wird.

(c) Der Raum $(E/F,\tau_q)$ ist ein Fréchetraum.

(Hinweis zu (b): Es gilt $q(\{x \in E;\ d(x,0) < \varepsilon\}) = \{u \in E/F;\ \varrho(u,0) < \varepsilon\}$.
Hinweis zu c): Vergleichen Sie mit dem entsprechenden Beweis im Fall von Banachräumen.)

Aufgabe 27 (4 Punkte)

Sei $T : E \to F$ eine lineare Abbildung zwischen lokalkonvexen Hausdorffräumen, $N \subset E$ ein linearer Teilraum mit $T|N = 0$ und $\hat{T} : E/N \to F$ definiert durch $\hat{T}([x]) = Tx$. Zeigen Sie:

(a) T ist stetig (bzw. offen) $\Leftrightarrow$ $\hat{T}$ ist stetig (bzw. offen)

(b) Falls $\dim F < \infty$, so gilt: T ist stetig $\Leftrightarrow$ $\ker T$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 28 **(4 Punkte)**

Sei $E = C([0,1])$ mit der lokalkonvexen Topologie versehen, die durch das Halbnormensystem $\{p_x;\ x \in [0,1]\}$ mit $p_x(f) = |f(x)|$ gegeben ist, und sei für $x \in [0,1]$

$$\delta_x : E \to \mathbb{C}\ ;\ f \mapsto f(x).$$

Zeigen Sie: Jedes stetige Funktional μ auf E ist von der Form

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{x_i}$$

mit $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$, $x_1, ..., x_n \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$.
(Hinweis: Aufgabe 23.)

Aufgabe 29* **(4 Punkte)**

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Teilmenge $M \subset E_1$ heißt *normierend für E'*, falls

$$\|u\| = \sup_{x \in M} |u(x)| \qquad (u \in E').$$

Zeigen Sie: M ist normierend für $E' \Leftrightarrow \overline{\Gamma(M)} = E_1$.
(Hinweis: Trennungssatz.)

Sie können sich die Übungsblätter auch direkt aus dem Netz herunterladen. Die Adresse lautet

http://www.math.uni-sb.de/˜ag-eschmeier/lehre/ss04/fa2

Die Blätter liegen im DVI-, PS- und PDF-Format vor.