UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2004

Blatt 7 Abgabetermin: Dienstag, 08.06.2004, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 30 **(4 Punkte)**

Sei $E = C[0,1]$ der Raum der stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$d(f,g) \;=\; \int_0^1 \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}dx \quad (f,g \in E)$$

eine Metrik auf E definiert.

(b) Sei weiter τ die durch das Halbnormensystem $(p_x,\ x \in [0,1])$ mit $p_x(f) = |f(x)|$ induzierte lokalkonvexe Topologie (vergleiche Aufgabe 28).
Zeigen Sie, dass die Identität

$$id : (E,\tau) \to (E,d)\ ;\ x \mapsto x$$

folgenstetig aber nicht stetig ist.

(c) Folgern Sie, dass (E,τ) nicht metrisierbar ist.

(Hinweis zu (b): Satz von der majorisierten Konvergenz.)

Aufgabe 31 **(4Punkte)**

Sei E ein k-Vektorraum. Wir betrachten die lokalkonvexe Toplogie τ auf E, die durch das System aller Halbnormen auf E erzeugt wird. Zeigen Sie:

(a) Die Menge aller absorbierenden, absolutkonvexen Teilmengen von E ist eine Nullumgebungsbasis von τ.

(b) τ ist feinste lokalkonvexe Topologie auf E.

(c) τ ist Hausdorffsch.

(d) Jedes lineare Funktional $E \to k$ ist bezüglich τ stetig.

Aufgabe 32 **(4+2* Punkte)**

Sei E ein k-Vektorraum und τ die feinste lokalkonvexe Topologie auf E (siehe Aufgabe 31). Zeigen Sie:

(a) Jeder Teilraum von E ist abgeschlossen.

(b) Jede beschränkte Teilmenge von E ist in einem endlichdimensionalen Teilraum von E enthalten.

(c) * Ist $\dim E = \infty$, so ist τ nicht metrisierbar.

Sei E ein topologischer k-Vektorraum und $K \subset E$ konvex.
Ein $x \in K$ heißt Extremalpunkt *von K, falls für $x_1, x_2 \in K, \lambda \in (0,1)$ mit $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ folgt, dass $x = x_1 = x_2$.*
Eine kompakte, konvexe Teilmenge $S \subset K$ heißt Seite von K, falls für alle $x_1, x_2 \in K$ mit $\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2;\ \lambda \in (0,1)\} \cap S \neq \emptyset$ gilt, dass $x_1, x_2 \in S$.

Aufgabe 33 **(4 Punkte)**

Sei E ein Hausdorffscher topologischer k-Vektorraum und $K \subset E$ konvex und kompakt. Zeigen Sie:

(a) Ein $x \in K$ ist genau dann Extremalpunkt von K, falls $\{x\}$ eine Seite von K ist.

(b) Beliebige Durchschnitte von Seiten von K sind Seiten von K.

(c) Sei $k = \mathbb{R}$. Für alle stetigen, $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $y : E \to \mathbb{R}$ ist

$$S_y = \{\ x \in K;\ y(x) = \max_{\xi \in K} y(\xi)\ \}$$

eine Seite von K.

Aufgabe 34* **(4 Punkte)**

Berechnen Sie alle Extremalpunkte der abgeschlossenen Einheitskugeln in folgenden normierten Räumen $(E, \|\cdot\|)$.

(a) $E = c_0 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}};\ x \text{ Folge in } \mathbb{C} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = 0\},\ \|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.

(b) $E = \ell^2,\ \|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.