UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2004

Blatt 8 Abgabetermin: Dienstag, 15.06.2004, vor der Vorlesung

---

Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum.
Für $M \subset E$ sei $M^\circ = \{x' \in E';\ |x'(x)| \le 1$ für alle $x \in M\} \subset E'$.
Für $M \subset E'$ sei $^\circ M = \{x \in E;\ |x'(x)| \le 1$ für alle $x' \in M\} \subset E$.

Aufgabe 35 **(4 Punkte)**
Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und sei $\emptyset \neq M \subset E$. Zeigen Sie, dass

$$^\circ(M^\circ) = \overline{\Gamma(M)}.$$

Für einen k-Vektorraum E und einen Unterraum $F \subset E^*$ nennt man (E,F) ein Dualsystem, *falls F die Punkte von E trennt, das heißt, zu $x \in E$ mit $x \neq 0$ existiert ein $x' \in F$ mit $x'(x) \neq 0$.*
Für ein Dualsystem (E,F) heißt eine Topologie t auf E zulässig, *falls $(E,t)' = F$ gilt.*

Aufgabe 36 **(4 Punkte)**
Sei (E,F) ein Dualsystem und t die von dem Halbnormensystem $(p_{x'})_{x' \in F}$ mit

$$p_{x'} : E \to \mathbb{R}\ ;\ p_{x'}(x) = |x'(x)|$$

erzeugte lokalkonvexe Topologie auf E. Dann ist t Hausdorffsch und zulässig für das Dualsystem (E,F).
(Hinweis: Aufgabe 23)

Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Eine Familie $(u_i)_{i\in I}$ von Linearformen $E \to k$ heißt gleichstetig, *falls eine Nullumgebung $U \subset E$ existiert mit $u_i \in U^\circ$ für alle $i \in I$.*

Aufgabe 37 **(4 Punkte)**
Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Eine Familie $(u_i)_{i\in I}$ von Linearformen auf E ist genau dann gleichstetig, wenn es eine stetige Halbnorm p auf E gibt, so dass

$$|u_i(x)| \le p(x) \quad (x \in E,\ i \in I)\ .$$

(b) Sei $F \subset E$ ein linearer Teilraum und $(u_i)_{i\in I}$ eine gleichstetige Familie von Linearformen auf F. Dann gibt es eine gleichstetige Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Linearformen auf E mit $u_i = v_i|_F$ für alle $i \in I$.

Aufgabe 38 **(4 Punkte)**

Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $\mathcal{L}(X) = \{T;\ T : X \to X \text{ stetig, linear}\}$. Sei τ_{WOT} die durch die Halbnormen

$$\|T\|_{x,u} \;=\; |\langle Tx, u\rangle| \quad (x \in X, u \in X')$$

und τ_{SOT} die durch die Halbnormen

$$\|T\|_{x} \;=\; \|Tx\| \quad (x \in X)$$

erzeugte lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{L}(X)$. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{L}(X), \tau_{\text{WOT}})$ und $(\mathcal{L}(X), \tau_{\text{SOT}})$ dieselben abgeschlossenen, konvexen Mengen besitzen.

Beweisen Sie dazu mit Hilfe von Aufgabe 23:

(a) Ist $\lambda : (\mathcal{L}(X), \tau_{\text{SOT}}) \to \mathbb{C}$ stetig, linear, so gibt es Linearformen $\lambda_1, \dots, \lambda_n : \mathcal{L}(X) \to \mathbb{C}$ und Vektoren $x_1, \dots, x_n \in X \setminus \{0\}$ mit $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$ und $\lambda_i(T) \leq \|Tx_i\|$ für alle $T \in \mathcal{L}(X)$ und $i = 1, \dots, n$.

(b) Für λ_i und x_i aus (a) gibt es eine stetige Linearform $u_i \in X'$ mit

$$u_i(Tx_i) \;=\; \lambda_i(T) \quad (T \in \mathcal{L}(X)) \;.$$

Aufgabe 39* **(4* Punkte)**

Sei E ein topologischer Vektorraum und seien $A \subset E$ abgeschlossen, $B \subset E$ kompakt mit $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Nullumgebung V in E mit $(B + V) \cap A = \emptyset$.

(b) Ist E lokalkonvex, so existieren $u \in E', \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\text{Re}\ u(x) \;<\; \alpha_1 \;<\; \alpha_2 \;<\; \text{Re}\ u(y) \quad (x \in A, y \in B) \;.$$