UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2004

Blatt 9 Abgabetermin: Dienstag, 22.06.2004, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 40 **(4 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω. Für jedes $K \subset \Omega$ kompakt sei $\mathcal{D}(K) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} f \subset K\}$ versehen mit der Relativtopologie bzgl. $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und sei

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K\subset\Omega \text{ kompakt}} \mathcal{D}(K)$$

versehen mit der induktiven lokalkonvexen Topologie τ der Inklusionen $(i_K)_{K\subset\Omega\text{kompakt}}$ mit $i_K : \mathcal{D}(K) \to \mathcal{D}(\Omega)$, $f \mapsto f$. Zeigen Sie:

(a) τ ist die induktive lokalkonvexe Topologie bezüglich den Inklusionen $(i_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Die Abbildungen $\delta_z : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(z)$ sind stetig für $z \in \Omega$ und $\mathcal{D}(\Omega)$ ist Hausdorffsch.

(c) $\mathcal{D}(\Omega)$ ist <u>kein</u> Fréchetraum.

(Hinweis zu (c): Wenden Sie den Satz von Baire auf $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(K_n)$ an.)

Aufgabe 41 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie für den Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ aus Aufgabe 40:

(a) Für $f \in C(\Omega)$ ist $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ stetig und linear.

(b) Die Abbildung $C(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)'$, $f \mapsto T_f$ ist linear und injektiv.

(c) Ist $f \in C^1(\Omega)$, so gilt für $i = 1, ..., n$ und $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$:

$$T_{\partial_i f}(\varphi) = -T_f(\partial_i \varphi) \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

(Hinweis zu (b): Benutzen Sie, dass es zu jedem $V \subset \mathbb{R}^n$ offen ein $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ gibt mit $\varphi \geq 0$ und $\int_V \varphi dx = 1$.)

Aufgabe 42 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie für den Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ aus Aufgabe 40:

(a) Für $f \in C^\infty(\Omega)$ ist $M_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \mapsto f\varphi$ stetig und linear.

(b) Für $D = \sum_{|i|\leq p} a_i D^i$, $D^i = \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_n}}{\partial x_n^{i_n}}$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = (i_1, ..., i_n) \in \mathbb{N}^n$ $(|i| = i_1 + \cdots i_n)$ ist die Abbildung

$$D : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega), f \mapsto \sum_{|i|\leq p} a_i D^i f,$$

stetig und linear.

(c) Für $T \in \mathcal{D}(\Omega)'$ und $f \in C^\infty(\Omega)$ definiert man $fT \in \mathcal{D}(\Omega)'$ und $\partial_i T \in \mathcal{D}(\Omega)'$ durch $fT(\varphi) = T(f\varphi)$ und $\partial_i T(\varphi) = -T(\partial_i \varphi)$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Zeigen Sie:

$$\partial_i(fT) = (\partial_i f)T + f(\partial_i T) \qquad (i = 1, ..., n).$$

Aufgabe 43 **(4 Punkte)**

Sei E ein lokalkonvexer Hausdorffraum und sei $\mathcal{B}$ das System der abgeschlossenen, absolut konvexen und beschränkten Mengen in E. Sei $E_B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB$, versehen mit dem Minkowskifunktional von B, $i_B : E_B \to E$, $x \mapsto x$ die Inklusionsabbildung $B \in \mathcal{B}$ und τ_{ind} die induktive lokaklkonvexe Topologie bezüglich den Abbildungen $i_B : E_B \to E$ $(B \in \mathcal{B})$. Zeigen Sie:

(a) $id : (E, \tau_{\text{ind}}) \to E$ ist stetig.

(b) Jede beschränkte lineare Abbildung $id : (E, \tau_{\text{ind}}) \to F$ (F lokalkonvexer topologischer Vektorraum) ist stetig.

(c) $id : (E, \tau_{\text{ind}}) \to E$ ist genau dann ein topologischer Isomorphismus, wenn jede beschränkte lineare Abbildung $T : E \to F$ (F lokalkonvexer topologischer Vektorraum) stetig ist.