Grundlagen zum Proseminar

Auf diesem Blatt werden einige grundlegende Definitionen und einfache Eigenschaften metrischer und normierter Räume zusammengefasst, die für das Seminar/Proseminar über Abbildungsgrade im Sommersemester 2006 benötigt werden.

1. Metrische Räume

Sei X eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty)$ heißt *Metrik* auf X, falls gilt:

- Für $x, y \in X$ ist $d(x, y) = d(y, x)$.
- Für $x, y \in X$ ist $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- Für $x, y, z \in X$ ist $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*Dreiecksungleichung*).

Man nennt das Paar (X, d) dann einen *metrischen Raum*.

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die folgenden Begriffe werden als bekannt vorausgesetzt:

- *offene* und *abgeschlossene* Teilmengen von X,
- *Abschluss, Inneres* und *Rand* einer Teilmenge von X,
- *konvergente Folgen* und *Cauchy-Folgen* in X,
- *Vollständigkeit* von X,
- *stetige* Funktionen von X in einen weiteren metrischen Raum (Y, d^*).

Ist (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq \Omega \subset X$, so ist

$$p(\cdot, \Omega) : X \to \mathbb{R}, \; x \mapsto p(x, \Omega) = \inf_{z \in \Omega} d(x, z)$$

die *Abstandsfunktion zu* Ω. Es gilt

$$|p(x, \Omega) - p(y, \Omega)| \leq d(x, y) \quad (x, y \in X)$$

und daher ist $p(\cdot, \Omega)$ stetig.

Eine Teilmenge $\Omega \subset X$ eines metrischen Raums (X, d) heißt *kompakt*, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

(i) Ist $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine offene Überdeckung von Ω, das heißt jedes U_λ $(\lambda \in \Lambda)$ ist offen und es gilt $\Omega \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, so gibt es endlich viele $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \Lambda$ mit $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^r U_{\lambda_i}$.

(ii) Jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Ω hat eine konvergente Teilfolge mit Limes in Ω.

Eine Menge $\Omega \subset X$ heißt *relativ kompakt*, falls ihr Abschluss $\overline{\Omega} \subset X$ kompakt ist.
Kompakte Mengen sind stets abgeschlossen und abgeschlossene Teilmengen von kompakten Mengen sind wieder kompakt.
Ist (Y, d^*) ein weiterer metrischer Raum, $f : X \to Y$ eine stetige Funktion und $\Omega \subset X$ kompakt, so ist auch $f(\Omega) \subset Y$ kompakt.

Ist (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq Y \subset X$, so ist $d|_{Y \times Y}$ eine Metrik auf Y (*Relativmetrik auf* Y).
Eine Teilmenge $V \subset Y$ ist genau dann offen (abgeschlossen) in $(Y, d|_{Y \times Y})$, wenn es eine in (X, d) offene (abgeschlossene) Menge $U \subset X$ mit $V = U \cap Y$ gibt.

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *zusammenhängend*, wenn es keine offenen Mengen $\emptyset \neq \Omega_1, \Omega_2 \subset X$ mit $X = \Omega_1 \dot{\cup} \Omega_2$ gibt. Eine Teilmenge $\Omega \subset X$ heißt *zusammenhängend*, wenn Ω mit der Relativmetrik $d|_{\Omega \times \Omega}$ zusammenhängend ist.
Eine *(Zusammenhangs-)komponente* von Ω ist eine zusammenhängende Teilmenge von Ω, zu der es keine zusammenhängende echte Obermenge in Ω gibt.
Ist $K \subset \Omega$ eine Komponente von Ω und ist $\Omega^* \subset \Omega$ eine zusammenhängende Menge mit $\Omega^* \cap K \neq \emptyset$, so gilt $\Omega^* \subset K$.
Weiterhin nennt man ein $\Omega \subset X$ *wegzusammenhängend*, wenn es für alle $x, x^* \in \Omega$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = x^*$ gibt.
Damit ist jede wegzusammenhängende Menge zusammenhängend.
Ist $\Omega \subset X$ (weg-)zusammenhängend und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung in einen weiteren metrischen Raum (Y, d^*), so ist auch $f(\Omega)$ (weg-)zusammenhängend.

2. Normierte Räume

Es sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und X ein Vektorraum über K.

Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : X \to [0, \infty), \; x \mapsto \|x\|$$

heißt *Norm* auf X, falls gilt:

- Für $x \in X$ und $\lambda \in K$ ist $\|\lambda \cdot x\| = \lambda \cdot \|x\|$.
- Für $x \in X$ ist $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$.
- Für $x, y \in X$ ist $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Dreiecksungleichung*).

Man nennt das Paar $(X, \|\cdot\|)$ dann einen *normierten Raum*.
In diesem Fall wird durch $d(x, y) = \|x - y\|$ $(x, y \in X)$ eine Metrik auf X definiert. Ist X bezüglich dieser Metrik vollständig, so nennt man $(X, \|\cdot\|)$ einen *Banachraum (B-Raum)*.

Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_1$ auf X heißen *äquivalent*, falls es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, so dass

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

für alle $x \in X$ gilt. In diesem Fall haben $(X, \|\cdot\|_1)$ und $(X, \|\cdot\|_2)$ dieselben offenen (abgeschlossenen, kompakten) Mengen und daher

auch dieselben topologischen Eigenschaften (Konvergenz, Stetigkeit, Vollständigkeit).
Ist $X = K^n$, so sind alle Normen auf X äquivalent zur *euklidischen Norm*, die durch

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n)$$

gegeben ist.

Eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist stets abgeschlossen und *beschränkt* (das heißt, es existiert ein $C > 0$ mit $\|x\| \leq C$ für alle $x \in K$).
Ist $X = K^n$ mit einer beliebigen Norm, so gilt auch die Umkehrung, das heißt jede Menge, die abgeschlossen und beschränkt ist, ist auch kompakt.

Eine Teilmenge $C \subset X$ heißt *konvex*, wenn für $x, y \in C$ und $t \in [0,1]$ auch $tx + (1-t)y \in C$ gilt.
Bezüglich einer beliebigen Norm auf X sind alle Kugeln konvex und jede konvexe Menge ist wegzusammenhängend.
Beliebige Durchschnitte von konvexen Mengen sind konvex.
Ist C konvex und sind $x_1, \dots, x_p \in C,\ \alpha_1, \dots, \alpha_p \in [0,1]$ mit $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$, so ist auch $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i \in C$.
Ist $\Omega \subset X$ eine Teilmenge, so nennt man

$$\mathrm{konv}(\Omega) = \{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i;\ p \in \mathbb{N},\ x_i \in \Omega,\ \alpha_i \in [0,1] \text{ mit } \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1\}$$

die *konvexe Hülle von* Ω. Damit ist $\mathrm{konv}(\Omega)$ die kleinste konvexe Obermenge von Ω.