UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2007

Blatt 1 Abgabetermin: Montag, 30.04.2007

Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum über $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$ und sei

$$\mathcal{U}_E(0) = \{U;\ U \subset E \text{ absolutkonvexe Nullumgebung}\}.$$

Eine Menge $B \subset E$ heißt beschränkt*, falls für alle $U \in \mathcal{U}_E(0)$ ein $\varrho > 0$ mit $B \subset \varrho \cdot U$ existiert. Ist F ein weiterer lokalkonvexer topologischer k-Vektorraum und $T : E \to F$ eine lineare Abbildung, so heißt T* beschränkt*, falls für alle beschränkten Mengen $B \subset E$ auch $TB \subset F$ beschränkt ist.*

Aufgabe 1 **(2+2+2*=4+2* Punkte)**
Seien E, F lokalkonvexe topologische Vektorräume und $T : E \to F$ linear. Zeigen Sie:

(a) T stetig $\Longrightarrow$ T beschränkt.

(b) Ist $(p_i)_{i\in I}$ ein erzeugendes Halbnormensystem für E, so ist eine Menge $B \subset E$ genau dann beschränkt, wenn alle Mengen $p_i(B) \subset \mathbb{R}$ $(i \in I)$ beschränkt sind.

(c)* Sei E ein Banachraum und sei τ_w die schwache Topologie auf E. Untersuchen Sie die Abbildung $\mathrm{id} : (E, \tau_w) \to (E, \|\cdot\|)$ auf Beschränktheit und Stetigkeit.

Aufgabe 2 **(2+2=4 Punkte)**
Seien E, F lokalkonvexe topologische Vektorräume, $B \subset E$ und $T : E \to F$ linear. Zeigen Sie:

(a) B ist beschränkt $\Longleftrightarrow$ Für jede Folge $(x_n)_n$ in B und jede Nullfolge $(\alpha_n)_n$ in k gilt $\alpha_n \cdot x_n \xrightarrow{n} 0$.

(b) T folgenstetig $\Longrightarrow$ T beschränkt.

Aufgabe 3 **(1+1+1+1+1=5 Punkte)**
Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und seien $A, B, M_1, \ldots, M_r \subset E$. Zeigen Sie:

(a) A beschränkt $\Longrightarrow$ $\overline{\Gamma(A)}$ beschränkt.

(b) A, B beschränkt $\Longrightarrow$ $A + B = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\}$ beschränkt.

(c) A kompakt $\Longrightarrow$ A beschränkt.

(d) $M_1, \ldots, M_r$ absolutkonvex $\Longrightarrow$

$$\Gamma(M_1 \cup \ldots \cup M_r) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i;\ x_i \in M_i \text{ und } \alpha_i \in k \text{ mit } \sum_{i=1}^{r} |\alpha_i| \leq 1 \right\}.$$

(e) $M_1, \ldots, M_r$ absolutkonvex und kompakt $\Longrightarrow$ $\Gamma(M_1 \cup \ldots \cup M_r)$ kompakt.

Aufgabe 4 **(2+2+2*=4+2* Punkte)**

Sei $(K_n)_{n\geq 1}$ eine kompakte Ausschöpfung einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ und sei

$$E = \mathcal{O}(U) = \{f;\ f : U \to \mathbb{C} \text{ analytisch}\}$$

versehen mit der Metrik

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \frac{\|f-g\|_{\infty,K_n}}{1+\|f-g\|_{\infty,K_n}} \quad (f,g \in E).$$

Zeigen Sie:

(a) E ist versehen mit der von d induzierten Topologie τ ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum.

(b) Die Halbnormen

$$p_n : E \to \mathbb{R},\ p_n(f) = \|f\|_{\infty,K_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

erzeugen die lokalkonvexe Topologie τ.

(c)* Eine Menge $B \subset E$ ist genau dann beschränkt und abgeschlossen, wenn B kompakt ist.

Hinweise:

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu den Übungsblättern in der Pause der Vorlesung ab. Dabei gilt **Einzelabgabe**. Die Übungen finden **montags (14-16 Uhr, SR3)** statt, erstmalig am 30.04.2007. Einen unbenoteten Schein erhalten Sie, wenn Sie mindestens 50 % der Gesamtpunkte aller Übungen erzielen und regelmäßig an den Übungen teilnehmen. Die mit * versehenen Aufgaben gehen dabei nicht in die Berechnung der notwendigen Gesamtpunke ein. Für einen benoteten Schein ist zusätzlich eine mündliche Prüfung erforderlich.

Bei Fragen oder Problemen bezüglich der Übungen wenden Sie sich an Kevin Everard (Zimmer 4.21, Email: kevclev@bigfoot.com) oder Dominik Faas (Zimmer 4.17, Email: dominik@math.uni-sb.de).

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre