UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2007

Blatt 10 Abgabetermin: Donnerstag, 05.07.2007

Aufgabe 40 **(4 Punkte)**
Sei $\langle E, F\rangle$ ein Dualsystem und seien τ_1, τ_2 zulässige Topologien auf E bezüglich $\langle E, F\rangle$ mit $\tau_1 \subset \tau_2$. Zeigen Sie: Ist (E, τ_1) (folgen-, quasi-)vollständig, so ist (E, τ_2) vollständig im selben Sinne.

Aufgabe 41 **(4 Punkte)**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Für $z \in \Omega$ sei $\delta_z \in \mathcal{D}(\Omega)'$ definiert durch $\delta_z(\varphi) = \varphi(z)$ $(z \in \mathcal{D}(\Omega))$. Sei τ eine zulässige Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega)'$ bezüglich des Dualsystems $\langle \mathcal{D}(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)'\rangle$. Zeigen Sie, dass die lineare Hülle $\mathrm{LH}\{\delta_z;\ z \in \Omega\}$ dicht in $(\mathcal{D}(\Omega)', \tau)$ liegt.

Aufgabe 42 **(4 Punkte)**
Seien E, F lokalkonvexe Hausdorffräume. Auf $L(E, F)$ betrachte man die γ-Topologien τ_w und τ_c, die durch $\gamma_w = \{S \subset E;\ S \text{ endlich}\}$ und $\gamma_c = \{S \subset E;\ S \text{ kompakt}\}$ definiert sind. Zeigen Sie, dass ein gleichstetiges Netz $(A_i)_{i\in I}$ in $L(E, F)$ genau dann bezüglich τ_w konvergiert, wenn es bezüglich τ_c konvergiert.

Aufgabe 43 **(2+2=4 Punkte)**
Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k \in C^\infty(\mathbb{R})$ definiert durch $f_k(x) = \cos(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 21, dass

$$T_{f_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{bezüglich } \sigma(\mathcal{D}(\Omega)', \mathcal{D}(\Omega)).$$

(b) Gilt auch

$$T_{f_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{bezüglich } \tau_b(\mathcal{D}(\Omega)', \mathcal{D}(\Omega))\ ?$$

Hinweis: Benutzen Sie partielle Integration oder die Stetigkeit des Ableitungsoperators $\frac{d}{dx} : \mathcal{D}(\Omega)' \to \mathcal{D}(\Omega)'$.

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre