UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2007

Blatt 11 Abgabetermin: Donnerstag, 12.07.2007

Aufgabe 44 **(4 Punkte)**
Sei $T : E \to F$ eine stetig lineare Abbildung zwischen lokalkonvexen Hausdorffräumen und $T' : F' \to E'$, $T'v = v \circ T$ die adjungierte Abbildung. Zeigen Sie, dass gilt:

$$(\ker T)^{\perp} = \overline{(\mathrm{Im}\ T')}^{\sigma(E',E)}, \quad {}^{\perp}(\ker T') = \overline{(\mathrm{Im}\ T)}^{\sigma(F,F')}.$$

Aufgabe 45 **(4 Punkte)**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\mathcal{D}(\Omega)'$ versehen mit der Topologie $\tau_b\left(\mathcal{D}(\Omega)', \mathcal{D}(\Omega)\right)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$j : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)',\ f \mapsto T_f$$

dichtes Bild hat.

Aufgabe 46 **(2+2+2+2*=6+2* Punkte)**
Für einen k-Vektorraum X bezeichne $X^* = \{u;\ u : X \to k \text{ linear}\}$ den algebraischen Dualraum. Zeigen Sie:

(a) X^* ist $\sigma(X^*, X)$-vollständig.

(b) Für einen lokalkonvexen Hausdorffraum E ist die kanonische Abbildung

$$j : \big(E, \sigma(E, E')\big) \longrightarrow \big((E')^*, \sigma((E')^*, E')\big),\ j(x)(x') = \langle x, x' \rangle$$

ein topologischer Monomorphismus mit dichtem Bild.

(c) Ein lokalkonvexer Hausdorffraum E ist genau dann $\sigma(E, E')$-vollständig, wenn die Abbildung j aus Teil (b) surjektiv ist.

(d)* Ein normierter Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist genau dann $\sigma(E, E')$-vollständig, wenn $\dim E < \infty$ ist.

Aufgabe 47 **(4 Punkte)**
Sei (E, τ) ein Semi-Montelraum, das heißt ein lokalkonvexer Hausdorffraum, in dem jede beschränkte Menge relativ kompakt ist. Zeigen Sie für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E und $x \in E$

$$x_n \xrightarrow{n} x \text{ bezüglich } \sigma(E, E') \quad \Longrightarrow \quad x_n \xrightarrow{n} x \text{ bezüglich } \tau.$$

Hinweis: Auf abgeschlossenen beschränkten Mengen $B \subset E$ stimmen $\sigma(E, E')$ und τ überein. Benutzen Sie hierzu, dass jede stetige Bijektion zwischen kompakten Hausdorffräumen offen ist.

Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ zwischen lokalkonvexen topologischen Vektorräumen heißt kompakt*, falls eine Nullumgebung $V \subset E$ existiert, für die $TV \subset F$ relativ kompakt ist.*

Aufgabe 48* **(4*Punkte)**

Sei E ein vollständiger lokalkonvexer Hausdorffraum, so dass alle Abbildungen

$$\Phi_U : E \to E_{(U)}^{\sim},\ x \mapsto x + \ker \varrho_U \quad (U \in \mathcal{U}_E(0))$$

kompakt sind (zum Beispiel ein vollständiger nuklearer Raum). Zeigen Sie, dass jede beschränkte Menge $B \subset E$ relativ kompakt in E ist.

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre