UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2007

Blatt 2 Abgabetermin: Donnerstag, 10.05.2007[(1)]

Aufgabe 5 **(1+2+2=5 Punkte)**

Sei E ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Zeigen Sie:

(a) Jedes konvergente Netz in E ist ein Cauchy-Netz.

(b) Jede Cauchy-Folge in E ist beschränkt. Gilt dies auch für Cauchy-Netze?

(c) Ist $K \subset E$ kompakt und $(x_i)_{i\in I}$ ein Cauchy-Netz in E mit $x_i \in K$ für alle $i \in I$, so ist $(x_i)_{i\in I}$ konvergent und der Grenzwert liegt in K.

Aufgabe 6 **(4 Punkte)**

Sei E ein lokalkonvexer Hausdorffraum und $M \subset E$ absolutkonvex und kompakt. Zeigen Sie, dass $E_M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n \cdot M$ zusammen mit der durch

$$p_M(x) = \inf\{\varrho > 0;\ x \in \varrho \cdot M\} \quad (x \in E_M)$$

definierten Halbnorm ein Banachraum ist.

Aufgabe 7 **(2+2=4 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass ein abzählbares topologisches Produkt metrischer Räume wieder ein metrischer Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass ein unendliches Produkt nichttrivialer normierter Räume niemals normierbar ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Nullumgung im Produktraum einen nichttrivialen Unterraum enthält.

Aufgabe 8 **(4 Punkte)**

Wir betrachten

$$s = \{x = (x_n)_{n\geq 1};\ x \text{ Folge in } \mathbb{C} \text{ mit } \|x\|_k = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| n^k < \infty \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie, dass s zusammen mit der von dem Halbnormensystem $(\|\cdot\|_k)_{k\in\mathbb{N}}$ erzeugten lokalkonvexen Topologie ein Fréchetraum ist.

Eine Metrik d auf einem k-Vektorraum X heißt translationsinvariant*, falls $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ für alle $x, y, z \in X$ gilt.*

Aufgabe 9* **(1*+1*+2*+2*=6* Punkte)**

Sei X ein metrisierbarer lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine translationsinvariante Metrik d auf X, die die Topologie von X erzeugt.

(b) Jede translationsinvariante Metrik d auf X erfüllt

$$d(nx, 0) \leq nd(x, 0) \quad (n \in \mathbb{N},\ x \in X).$$

(c) Ist $(x_n)_n$ eine Folge in X mit $x_n \to 0$, so gibt es eine Folge positiver reeller Zahlen $(\gamma_n)_n$ mit $\gamma_n \to \infty$ und $\gamma_n \cdot x_n \to 0$.

(d) Für jede translationsinvariante Metrik d auf X, die die Topologie von X erzeugt, gilt:

$$X \text{ ist ein Fréchet-Raum} \iff (X, d) \text{ ist ein vollständiger metrischer Raum.}$$

Aufgabe 10* **(3* Punkte)**

Sei E ein k-Vektorraum. Zeigen Sie: Die Menge aller Halbnormen auf E erzeugt eine lokalkovexe Topologie τ auf E, für die das System aller absorbierenden absolutkonvexen Mengen eine Nullumgebungsbasis ist. Die Topologie τ ist die feinste lokalkonvexe Topologie auf E. Sie ist Hausdorffsch.

---

(1): Die Aufgaben 9* und 10* sollen schon am Montag, den 07.05.2007 abgegeben werden.

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre