UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2007

Blatt 3 Abgabetermin: Donnerstag, 17.05.2007

Aufgabe 11 **(2+1+1=4 Punkte)**

Seien E, F lokalkonvexe topologische Vektorräume. Für $i \in I$ sei $A_i : E \to F$ eine stetige lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Familie $(A_i)_{i \in I}$ ist punktweise beschränkt, das heißt für jedes $x \in E$ ist die Menge $\{A_i x;\ i \in I\}$ beschränkt in F.

(ii) Für jede Nullumgebung ist die Menge $\bigcap_{i \in I} A_i^{-1}(V)$ absorbierend in E.

(b) Sei nun die Topologie auf E von einer vollständigen Metrik erzeugt. Die Familie $(A_i)_{i \in I}$ sei punktweise beschränkt. Zeigen Sie: Für jede abgeschlossene absolutkonvexe Nullumgebung $V \subset F$ ist $T = \bigcap_{i \in I} A_i^{-1}(V)$ eine Nullumgebung in E.
Hinweis: Es gilt $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nT$.

(c) Welcher Satz aus der FA I ist damit bewiesen?

Aufgabe 12 **(2+2+2=6 Punkte)**

Sei (E, τ) ein Fréchetraum und d eine translationsinvariante Metrik auf E, die die Topologie τ erzeugt. Sei $F \subset E$ ein abgeschlossener Teilraum und τ_q die Quotiententopologie von τ auf E/F. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$\varrho\left([x],[y]\right) = \inf\{d(x-y,z);\ z \in F\} \quad (x, y \in E)$$

wird eine translationsinvariante Metrik ϱ auf E/F definiert.

(b) Die Quotientenabbildung $q : (E, d) \to (E/F, \varrho)$ ist stetig und offen. Schließen Sie, dass die Topologie τ_q von ϱ erzeugt wird.
Hinweis: Es gilt $q\left(\{x \in E;\ d(x,0) < \varepsilon\}\right) = \{u \in E/F;\ \varrho(u,0) < \varepsilon\}$.

(c) Der Raum $(E/F, \tau_q)$ ist ein Fréchetraum.
Hinweis: Vergleichen Sie mit dem entsprechenden Beweis im Fall von Banachräumen.

Aufgabe 13 **(2+2=4 Punkte)**

Sei $T : E \to F$ eine lineare Abbildung zwischen lokalkonvexen Hausdorffräumen, $N \subset E$ ein linearer Teilraum mit $T|_N = 0$. Wir betrachten

$$\hat{T} : E/N \to F;\ \hat{T}[x] = Tx.$$

Zeigen Sie:

(a) T ist stetig (offen) $\iff$ $\hat{T}$ ist stetig (offen).

(b) Ist $\dim F < \infty$, so gilt: T ist stetig $\iff$ $\ker T$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 14 **(4 Punkte)**

Sei E ein k-Vektorraum und $u : E \to k$ eine lineare Abbildung. Seien $p_1, \ldots, p_n$ Halbnormen auf E mit

$$|u(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \quad \text{für alle } x \in E.$$

Zeigen Sie: Es existieren lineare Abbildungen $u_1, \ldots, u_n : E \to k$ mit $u = \sum_{i=1}^n u_i$ und $|u_i(x)| \leq p_i(x)$ für alle $x \in E$ und alle $i = 1, \ldots, n$.

Hinweis: Betrachten Sie die Halbnorm $p : E^n \to \mathbb{R};\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n p_i(x_i)$ und identifizieren Sie E mit einem geeigneten Teilraum von E^n.

Aufgabe 15* **(4* Punkte)**

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Teilmenge $M \subset E_1 = \{x \in E;\ \|x\| \leq 1\}$ heißt *normierend für E'*, falls

$$\|u\| = \sup_{x \in M} |u(x)| \quad \text{für alle } u \in E'$$

gilt. Zeigen Sie: M ist normierend für E' $\iff$ $\overline{\Gamma(M)} = E_1$.

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre