UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2007

Blatt 4 Abgabetermin: Donnerstag, 24.05.2007

Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum.
Für $M \subset E$ sei $M^\circ = \{x' \in E';\ |x'(x)| \leq 1$ für alle $x \in M\} \subset E'$.
Für $N \subset E'$ sei ${}^\circ N = \{x \in E;\ |x'(x)| \leq 1$ für alle $x' \in N\} \subset E$.

Aufgabe 16 **(4 Punkte)**

Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und sei $\emptyset \neq M \subset E$. Zeigen Sie, dass

$$^\circ(M^\circ) = \overline{\Gamma(M)}.$$

Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Eine Familie $(u_i)_{i\in I}$ von Linearformen $E \to k$ heißt gleichstetig, *falls eine Nullumgebung $U \subset E$ existiert mit $u_i \in U^\circ$ für alle $i \in I$.*

Aufgabe 17 **(2+2=4 Punkte)**

Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Eine Familie $(u_i)_{i\in I}$ von Linearformen auf E ist genau dann gleichstetig, wenn es eine stetige Halbnorm p auf E gibt, so dass

$$|u_i(x)| \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in E \text{ und alle } i \in I.$$

(b) Sei $F \subset E$ ein linearer Teilraum und $(u_i)_{i\in I}$ eine gleichstetige Familie von Linearformen auf F. Dann gibt es eine gleichstetige Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Linearformen auf E mit $u_i = v_i|_F$ für alle $i \in I$.

Aufgabe 18 **(2+2=4 Punkte)**

Sei E ein topologischer Vektorraum und seien $A \subset E$ abgeschlossen, $B \subset E$ kompakt mit $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Nullumgebung V in E mit $(B + V) \cap A = \emptyset$.

(b) Ist E lokalkonvex und sind A, B zusätzlich konvex, so existieren $u \in E'$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\text{Re } u(x) \ < \ \alpha_1 \ < \ \alpha_2 \ < \ \text{Re } u(y) \quad (x \in A,\ y \in B)\ .$$

Hinweis: Benutzen Sie Teil (a) und den Trennungssatz aus der Vorlesung.

Aufgabe 19 **(2+2+2=6 Punkte)**

Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $\mathcal{L}(X) = \{T;\ T : X \to X$ stetig, linear$\}$. Sei τ_{WOT} die durch die Halbnormen

$$\|T\|_{x,u} \;=\; |\langle Tx, u\rangle| \quad (x \in X,\ u \in X')$$

und τ_{SOT} die durch die Halbnormen

$$\|T\|_x \;=\; \|Tx\| \quad (x \in X)$$

erzeugte lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{L}(X)$. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{L}(X), \tau_{\mathrm{WOT}})$ und $(\mathcal{L}(X), \tau_{\mathrm{SOT}})$ dieselben abgeschlossenen, konvexen Mengen besitzen.
Beweisen Sie dazu mit Hilfe von Aufgabe 14:

(a) Ist $\lambda : (\mathcal{L}(X), \tau_{\mathrm{SOT}}) \to \mathbb{C}$ stetig linear, so gibt es Linearformen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n : \mathcal{L}(X) \to \mathbb{C}$ und Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in X \setminus \{0\}$ mit $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$ und $\lambda_i(T) \leq \|Tx_i\|$ für alle $T \in \mathcal{L}(X)$ und $i = 1, \ldots, n$.

(b) Für λ_i und x_i aus (a) gibt es eine stetige Linearform $u_i \in X'$ mit

$$u_i(Tx_i) \;=\; \lambda_i(T) \quad (T \in \mathcal{L}(X)) \;.$$

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/∼ag-eschmeier/lehre