UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2007

Blatt 5 Abgabetermin: Donnerstag, 31.05.2007

Aufgabe 20 **(1+1+2=4 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω. Für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ sei

$$\mathcal{D}(K) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \operatorname{supp} f \subset K\}$$

versehen mit der Relativtopologie bezüglich $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Weiter sei

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup(\mathcal{D}(K);\ K \subset \Omega \text{ kompakt})$$

versehen mit der induktiven lokalkonvexen Topologie τ der Inklusionen

$$i_K : \mathcal{D}(K) \to \mathcal{D}(\Omega),\ f \mapsto f \quad (K \subset \Omega \text{ kompakt}).$$

Zeigen Sie:

(a) τ ist die induktive lokalkonvexe Topologie bezüglich den Inklusionen $(i_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Die Abbildungen
$$\delta_z : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(z) \quad (z \in \Omega)$$
sind stetig und $\mathcal{D}(\Omega)$ ist Hausdorffsch.

(c) $\mathcal{D}(\Omega)$ ist kein Fréchetraum.
Hinweis: Wenden Sie den Satz von Baire auf $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(K_n)$ an.

Aufgabe 21 **(1+1,5+1,5=4 Punkte)**

Zeigen Sie für den Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ aus Aufgabe 20:

(a) Für $f \in C(\Omega)$ ist die Abbildung
$$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)\ dx$$
linear und stetig.

(b) Die Abbildung $C(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)'$, $f \mapsto T_f$ ist linear und injektiv.
Hinweis: Benutzen Sie, dass es zu jeder offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ ein $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ gibt mit $\varphi \geq 0$ und $\int_V \varphi\ dx = 1$.

(c) Ist $f \in C^1(\Omega)$, so gilt für $i = 1, \ldots, n$ und $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$
$$T_{\partial_i f}(\varphi) = -T_f(\partial_i \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Aufgabe 22 **(1,5+1,5+1=4 Punkte)**

Zeigen Sie für den Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ aus Aufgabe 20:

(a) Für $f \in C^\infty(\Omega)$ ist $M_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega),\ \varphi \mapsto f \cdot \varphi$ linear und stetig.

(b) Für $D = \sum_{i \in \mathbb{N}^n,\ |i| \leq p} a_i D^i$ mit $p \in \mathbb{N},\ D^i = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{i_n}$ und $a_i \in \mathbb{C}$ ist die Abbildung

$$D : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega),\ \varphi \mapsto \sum_{|i| \leq p} a_i D^i \varphi$$

linear und stetig.

(c) Für $T \in \mathcal{D}(\Omega)'$, $f \in C^\infty(\Omega)$ und $i = 1, \ldots, n$ definiert man $fT \in \mathcal{D}(\Omega)'$ und $\partial_i T \in \mathcal{D}(\Omega)'$ durch

$$fT(\varphi) = T(f\varphi) \text{ und } \partial_i T(\varphi) = -T(\partial_i \varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

Zeigen Sie:

$$\partial_i(fT) = (\partial_i f)T + f(\partial_i T).$$

Aufgabe 23 **(2+2=4 Punkte)**

(a) Seien $((E_\alpha)_{\alpha \in A},\ (\phi_{\alpha\beta})_{\alpha \geq \beta})$ und $((F_\alpha)_{\alpha \in A},\ (\pi_{\alpha\beta})_{\alpha \geq \beta})$ projektive Spektren und seien $T_\alpha : E_\alpha \to F_\alpha$ für $\alpha \in A$ stetig linear mit

$$\pi_{\alpha\beta} \circ T_\alpha = T_\beta \circ \phi_{\alpha\beta} \quad \text{für alle } \alpha \geq \beta.$$

Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte stetig lineare Abbildung $T : \operatorname{proj}_\alpha E_\alpha \to \operatorname{proj}_\alpha F_\alpha$ existiert mit

$$\pi_\beta \circ T = T_\beta \circ \phi_\beta \quad \text{für alle } \beta \in A.$$

Hierbei seien $\phi_\beta : \operatorname{proj}_\alpha E_\alpha \to E_\beta$ und $\pi_\beta : \operatorname{proj}_\alpha F_\alpha \to F_\beta$ für $\beta \in A$ die kanonischen Projektionen.

(b) Formulieren und beweisen Sie ein entsprechendes Resultat für induktive Spektren.

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre