UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2007

Blatt 6 Abgabetermin: Freitag, 08.06.2007

Aufgabe 24 **(4 Punkte)**

Sei E ein Banachraum, B_E die abgeschlossene Einheitskugel in E und $j : E \to E''$ die kanonische Isometrie. Zeigen Sie:

(a) $j(B_E)$ ist $\sigma(E'', E')$-dicht in $B_{E''}$.

(b) E ist schwach quasivollständig genau dann, wenn E reflexiv ist.

Hierbei bezeichnet $\sigma(E'', E')$ die schwach-$*$-Topologie von E'' als Dualraum von E'.

Aufgabe 25 **(1+1+2+2=6 Punkte)**

Sei E ein Hausdorffscher lokalkonvexer topologischer Vektorraum und sei $\mathcal{B}$ das System der abgeschlossenen, absolut konvexen und beschränkten Mengen in E. Sei $E_B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB$, $B \in \mathcal{B}$, versehen mit dem Minkowskifunktional von B. Zeigen Sie:

(a) $E = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} E_B$.

(b) Bezeichnet $\mathrm{ind}_{B\in\mathcal{B}} E_B$ den Raum E, versehen mit der induktiven lokalkonvexen Topologie der Inklusionsabbildungen $i_B : E_B \hookrightarrow E$ $(B \in \mathcal{B})$, so ist $\mathrm{id} : \mathrm{ind}_{B\in\mathcal{B}} E_B \to E$ stetig.

(c) Jede beschränkte lineare Abbildung $T : \mathrm{ind}_{B\in\mathcal{B}} E_B \to F$ in einen lokalkonvexen topologischen Vektorraum F ist stetig.

(d) Die identische Abbildung $\mathrm{id} : \mathrm{ind}_{B\in\mathcal{B}} E_B \to E$ ist genau dann ein topologischer Isomorphismus, wenn jede beschränkte lineare Abbildung $T : E \to F$, F lokalkonvexer topologischer Vektorraum, stetig ist.

Aufgabe 26 **(2+2=4 Punkte)**

(a) Zeigen Sie: Es gibt keine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)\ dt = \varphi(0)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (hierbei bezeichne $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ den in Aufgabe 20 definierten Raum).

(b) Berechnen Sie die distributionelle Ableitung (vgl. Aufgabe 22) der lokal integrierbaren Funktion

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ H(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ 1 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(eine Funktion auf $\mathbb{R}$ heißt lokal integrierbar, wenn sie über jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$ integrierbar ist).

Aufgabe 27 **(4 Punkte)**

Sei E der induktive Limes eines abzählbaren strikten Einbettungsspektrums $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus vollständigen lokalkonvexen Hausdorffräumen E_n mit $E_n \neq E$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: E ist nicht metrisierbar.

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre