UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2007

Blatt 7 Abgabetermin: Donnerstag, 13.06.2007

Aufgabe 28 **(4 Punkte)**

Sei E ein lokalkonvexer Hausdorffraum. Zeigen Sie: Ist E tonneliert, so ist auch die Vervollständigung $\hat{E}$ tonneliert. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 29 **(3+2=5 Punkte)**

Seien E, F, G lokalkonvexe topologische Vektorräume und $B : E \times F \to G$ eine bilineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) B ist genau dann stetig, wenn für jede stetige Halbnorm q auf G stetige Halbnormen p_E auf E und p_F auf F existieren, so dass

$$q\left(B(x,y)\right) \;\leq\; p_E(x)\cdot p_F(y)$$

für alle $x \in E$ und $y \in F$ gilt.

(b) Sind $E.F$ Fréchetträume und sind alle Abbildungen $B(x,\cdot)$ $(x \in E)$ und $B(\cdot,y)$ $(y \in F)$ stetig, so ist B stetig.
Hinweis: Es genügt die Folgenstetigkeit von B zu zeigen. Betrachten Sie für eine Nullfolge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in F die Menge $\{B(\cdot,y_n);\ n \in \mathbb{N}\} \subset L(E,G)$.

Aufgabe 30 **(4 Punkte)**

Sei E ein Banachraum. Zeigen Sie:

$$\big(E, \sigma(E,E')\big) \text{ ist tonneliert } \Leftrightarrow \dim E < \infty.$$

Hinweis: Die Menge $B_{E'}$ ist nicht $\sigma(E,E')$-gleichstetig, wenn $\dim E = \infty$.

Aufgabe 31 **(4 Punkte)**

Seien E, F lokalkonvexe Räume, E tonneliert und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetig linearer Operatoren $T_n : E \to F$. Für alle $x \in E$ existiere $\lim_{n\to\infty} T_n x \in F$. Zeigen Sie, dass der Operator

$$T : E \to F,\ x \mapsto \lim_{n\to\infty} T_n x$$

stetig linear ist.

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/∼ag-eschmeier/lehre