



Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2007

Blatt 9

Abgabetermin: Donnerstag, 28.06.2007

Aufgabe 36

(4 Punkte)

Sei $\langle E, F \rangle$ ein Dualsystem. Eine lineare Abbildung $T : E \rightarrow E$ heißt *konjugierbar*, falls eine lineare Abbildung $T' : F \rightarrow F$ existiert mit

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T'y \rangle \quad (x \in E, y \in F).$$

Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung $T : E \rightarrow E$ genau dann konjugierbar ist, wenn sie schwach stetig ist, das heißt $T : (E, \sigma(E, F)) \rightarrow (E, \sigma(E, F))$ stetig ist.

Aufgabe 37

(4 Punkte)

Sei $\langle E, F \rangle$ ein Dualsystem und $F_0 \subsetneq F$ ein echter linearer Teilraum von F , der punktetrennend für E ist, das heißt zu jedem $x \in E \setminus \{0\}$ existiert ein $u \in F_0$ mit $\langle x, u \rangle \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\sigma(E, F_0)$ echt größer ist als $\sigma(E, F)$.

Aufgabe 38

(1+3=4 Punkte)

Seien E, F lokalkonvexe Hausdorffräume und $T : E \rightarrow F$ eine stetig lineare Abbildung. Zeigen Sie:

- (a) $T : (E, \sigma(E, E')) \rightarrow (F, \sigma(F, F'))$ ist stetig.
- (b) Die Abbildung

$$T' : F' \rightarrow E', \quad T'(u) = u \circ T$$

ist stetig linear, wenn man F' und E' jeweils beide mit der schwachen Topologie (Mackey-Topologie, starken Topologie) in den Dualsystemen $\langle F, F' \rangle$ und $\langle E, E' \rangle$ versieht.

Aufgabe 39**(1+3+2=6 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $p \in \mathbb{N}$ und $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^N$ mit $|\alpha| \leq p$. Zeigen Sie:

(a) Der Operator

$$L : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega), \quad f \mapsto \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha \cdot D^\alpha f$$

und der entsprechende Operator $L : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ sind linear und stetig.

Hinweis: Aufgabe 22

(b) Es gibt einen eindeutig bestimmten stetig linearen Operator $L^* : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} f L^*(\varphi) dx = \int_{\Omega} L(f) \varphi dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad f \in C^\infty(\Omega)).$$

Hinweis: Aufgabe 21

(c) Für $f \in C^\infty(\Omega)$ sei $T_f \in \mathcal{D}(\Omega)'$ wie in Aufgabe 21 definiert. Wir haben dort bereits gezeigt, dass die Abbildung

$$j : C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)', \quad f \mapsto T_f$$

linear und injektiv ist. Finden Sie einen stetig linearen Operator $\tilde{L} : \mathcal{D}(\Omega)' \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)'$, der $L : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ fortsetzt in dem Sinne, dass

$$j \circ L = \tilde{L} \circ j$$

gilt. Hierbei sei $\mathcal{D}(\Omega)'$ mit der Topologie $\tau_b(\mathcal{D}(\Omega)', \mathcal{D}(\Omega))$ versehen.

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

<http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre>