UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Komplexe Analysis

Sommersemester 2011

Blatt 1 Abgabetermin: Dienstag, 26.04.2011

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ eine kompakte, konvexe Menge. Zeigen Sie, dass K polynom-konvex ist.
(*Hinweis: Beweis von Korollar 5.7.*)

Für ein Kompaktum $K \subset \mathbb{C}^n$ bezeichne $P(K)$ die Algebra aller stetigen Funktionen $f : K \to \mathbb{C}$, für die es eine Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Polynomen $p_k \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ gibt mit $\|f - p_k\|_{\infty,K} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie, dass K als Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ polynom-konvex ist. (*Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^n$ ist. Beweisen Sie dann, dass $\tilde{K} = K$ ist. Sie dürfen benutzen, dass $P(L) = C(L)$ für jedes Kompaktum $L \subset \mathbb{R}^n$ ist (Satz von Stone-Weierstraß).*)

Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ heißt polynomieller Polyeder*, falls Ω die Gestalt $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n;\ \|p(z)\|_\infty < 1\}$ mit einem endlichen Tupel $p = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]^m$ hat.*

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen. Zeigen Sie, dass Ω Rungesch ist genau dann, wenn es eine Folge polynomieller Polyeder $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$ gibt so, dass

$$\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt. Zeigen Sie:

$$K \text{ polynom-konvex } \Longrightarrow \mathbb{C}^n \setminus K \text{ zusammenhängend.}$$

Gilt auch die umgekehrte Inklusion? Beweis oder Gegenbeispiel!

Aufgabe 5* (4* Punkte)

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{K} = K \cup \bigcup (C;\ C \text{ beschränkte Komponente von } \mathbb{C} \setminus K).$$

(*Hinweis: Sei w ein Punkt in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$. Benutzen Sie zum Beweis von $w \notin \tilde{K}$ den Satz von Runge (Korollar 11.1.4 in "Lorenz, Funktionentheorie").*)

(bitte wenden)

Hinweis:

Bitte geben Sie Ihre Lösungen zu den Übungsblättern vor der Vorlesung ab. Einen Schein erhalten Sie, wenn Sie mindestens 50% der Gesamtpunkte aller Übungen erzielen, regelmäßig an den Übungen teilnehmen und am Ende des Semesters eine mündliche Prüfung bestehen. Die mit * versehenen Aufgaben gehen dabei nicht in die Berechnung der Gesamtpunkte ein. Die Übungen finden 14-tägig statt. Bei Fragen oder Problemen bezüglich der Übungen wenden Sie sich bitte an Michael Wernet (Zimmer 4.17, Email: wernet@math.uni-sb.de).

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre