UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Komplexe Analysis

Sommersemester 2011

Blatt 3 Abgabetermin: Dienstag, 24.05.2011

Aufgabe 10 **(3+1=4 Punkte)**

Sei $u : G \to [-\infty, \infty)$ subharmonisch auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und sei $a \in G$ mit $u(z) \leq u(a)$ für alle $z \in G$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 8, dass die Menge $\{z \in G;\ u(z) = u(a)\}$ offen ist.

(b) Folgern Sie, dass u konstant ist.

Aufgabe 11 **(2+2+1=5 Punkte)**

Sei $u : G \to [-\infty, \infty)$ subharmonisch auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $u \not\equiv -\infty$.

(a) Seien $a \in G$ mit $u(a) > -\infty$ und $R > 0$ mit $\overline{D}_R(a) \subset G$. Zeigen Sie, dass $u|_{\overline{D}_R(a)}$ integrabel ist. Wählen Sie dazu stetige Funktionen $h_k : \overline{D}_R(a) \to \mathbb{R}$ mit $h_k \downarrow u|_{\overline{D}_R(a)}$ und berechnen Sie

$$\int_{\overline{D}_R(a)} h_k dz$$

mit Hilfe von Polarkoordinaten.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{z \in G;\ \text{es existiert eine Umgebung } U \text{ von } z \text{ mit } u|_U \in \mathcal{L}^1(U)\}$$

abgeschlossen in G ist.

(*Hinweis: Sonst gäbe es eine Folge* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* M*, so dass* $u(a_k) > -\infty$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *und* $\lim_{k\to\infty} a_k \in G \setminus M$ *gilt.*)

(c) Schließen Sie, dass u lokal integrabel ist.

Aufgabe 12 **(4 Punkte)**

Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und sei $f \in \mathcal{O}(U)$ analytisch mit $f(z) = 0$ für alle $z = (z_1, \ldots, z_n) \in U$ mit $z_1 = 0$. Zeigen Sie, dass eine analytische Funktion $g \in \mathcal{O}(U)$ existiert mit $f(z) = z_1 g(z)$ für alle $z = (z_1, \ldots, z_n) \in U$.

(*Hinweis: Riemannscher Hebbarkeitssatz*)

(bitte wenden)

Aufgabe 13 **(4 Punkte)**

Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, so dass jedes Cousin-I-Datum über U eine Lösung hat. Zeigen Sie, dass $H^1(C^\infty(U), \overline{\partial}) = 0$ ist.

(*Hinweis: Offene Kugeln $B \subset \mathbb{C}^n$ sind Rungesch.*)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre