UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Komplexe Analysis

Sommersemester 2011

Blatt 4 Abgabetermin: Dienstag, 07.06.2011

Aufgabe 14 (4 Punkte)

Seien $\varnothing \neq K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt, $\varnothing \neq A \subset \mathbb{C}^n$ abgeschlossen und $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen $A_j \subset \mathbb{C}^n$ mit $A = \bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{dist}(K, A_j) = \operatorname{dist}(K, A).$$

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen. Zeigen Sie, dass Ω genau dann ein Holomorphiebereich ist, wenn es eine Folge analytischer Polyeder Ω_k $(k \in \mathbb{N})$ gibt mit $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\Omega = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$.

Aufgabe 16 (2+1+2=5 Punkte)

Seien $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $g, h \in \mathcal{O}(U)$ mit $g|_{Z(h)} \equiv 0$ und $(\partial_\nu h(z))_{1\leq\nu\leq n} \neq 0$ für alle $z \in Z(h)$. Man zeige:

(a) Zu $a \in Z(h)$ existiert eine biholomorphe Abbildung $f : V \to W$ von einer offenen Umgebung $V \subset U$ von a auf einen offenen Polyzylinder $W \subset \mathbb{C}^n$ um 0 mit $h \circ f^{-1}(z) = z_n$ für alle $z \in W$.

(*Hinweis: Beweis von Satz 3.2.*)

(b) Für $z = (z', z_n) \in W$ mit $z_n \neq 0$ ist

$$(g/h) \circ f^{-1}(z) = \frac{1}{z_n} \int_{[0,z_n]} \partial_n (g \circ f^{-1})(z', \xi) d\xi.$$

(c) Es gibt eine eindeutige Funktion $G \in \mathcal{O}(U)$ mit $G(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ für alle $z \in U \setminus Z(h)$.

(bitte wenden)

Sei $A \subset U$ analytisch in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}^n$. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ heißt holomorph, *wenn zu jedem $\alpha \in U$ eine offene Umgebung U_α von α und ein $f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ existieren mit $f = f_\alpha$ auf $A \cap U_\alpha$.*

Aufgabe 17 (3+2=5 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen mit $H^1(C^\infty(U), \overline{\partial}) = 0$. Seien $h \in \mathcal{O}(U)$ eine Funktion mit $(\partial_\nu h(z))_{1 \le \nu \le n} \neq 0$ für alle $z \in Z(h)$ und $f : Z(h) \to \mathbb{C}$ holomorph. Man zeige

(a) Es gibt eine offene Überdeckung $U = \bigcup\limits_{\alpha \in U} U_\alpha$ und Funktionen $f_\alpha, h_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ mit

$$f_\beta - f_\alpha = h(h_\beta - h_\alpha) \text{ auf } U_\alpha \cap U_\beta \qquad \text{und} \qquad f_\alpha = f \text{ auf } U_\alpha \cap Z(h)$$

für alle $\alpha, \beta \in U$.

(*Hinweis: Aufgabe 16.*)

(b) Es gibt eine Funktion $F \in \mathcal{O}(U)$ mit $f = F|_{Z(h)}$.

Aufgabe 18* (4* Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen, $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ aufsteigende Folgen offener Mengen $\Omega_j \subset \mathbb{C}^n$ beziehungsweise kompakter Mengen $K_j \subset \mathbb{C}^n$ mit $\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{Int}(K_j)$, so dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $K_j \subset \Omega_j \subset \Omega$,

(ii) K_j hat die Cousin-Eigenschaft,

(iii) Jedes $g \in \mathcal{O}(K_j)$ ist auf K_j gleichmäßiger Limes einer Folge in $\mathcal{O}(\Omega_{j+1})$.

Zeigen Sie, dass die $\overline{\partial}$-Sequenz auf Ω exakt ist.

(*Hinweis: Gehen Sie wie im Beweis von Satz 7.8 vor.*)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre