UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Komplexe Analysis

Sommersemester 2011

Blatt 5 Abgabetermin: Dienstag, 21.06.2011

Aufgabe 19 **(3 Punkte)**

Sei $U = B_1(0) \setminus \overline{B}_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{C}^2$ und $V = \{z \in \mathbb{C};\ (0, z') \in U\}$. Gibt es zu jeder holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(V)$ eine holomorphe Funktion $F \in \mathcal{O}(U)$ mit $f(z) = F(0, z)$ für alle $z \in V$?

Aufgabe 20 **(2+2=4 Punkte)**

Seien $D \subset \mathbb{C}^n$ eine offene, konvexe Menge, $a \in D$ und $f \in \mathcal{O}(D)$. Man zeige:

(a) Für $z \in D$ gilt $f(z) = f(a) + \sum\limits_{j=1}^{n} (z_j - a_j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z_j}(a + t(z - a))dt$.

(b) Benutzen sie Teil (a) um zu zeigen, dass $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{O}(D)$ existieren mit

$$f(z) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} (z_j - a_j) g_j(z) \quad (z \in D).$$

Aufgabe 21 **(4 Punkte)**

Man zeige: Die Funktion $r : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R},\ r(z) = \log(1 + \|z\|^2)$ ist streng plurisubharmonisch. Die Funktion $u : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$

$$u(z, w) = \mathrm{Re}\ w + |z|^8 + \frac{15}{7}|z|^2 \mathrm{Re}\ z^6$$

ist C^∞ mit $\langle L_z(u)t, t\rangle \geq 0$ für alle $z, t \in \mathbb{C}^2$, aber u ist in keinem Punkt $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ streng plurisubharmonisch.

Aufgabe 22 **(2+2+2=6 Punkte)**

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $u \in C^2(U, \mathbb{R})$. Man zeige:

(a) Hat u in einem Punkt $a \in U$ ein lokales Maximum, so ist $\Delta u(a) \leq 0$.

(b) Ist $\Delta u \geq 0$ auf U, so ist u subharmonisch.
(Hinweis: Mit Teil (a) folgt zunächst, dass für alle $\epsilon, \delta > 0$ die Funktion $u(z) - \epsilon + \delta|z|^2$ subharmonisch ist auf U.)

(c) Ist u subharmonisch, so ist $\Delta u \geq 0$.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre