UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Komplexe Analysis

Sommersemester 2011

Blatt 6 Abgabetermin: Dienstag, 05.07.2011

Aufgabe 23 **(3+1=4 Punkte)**

Seien $U \subset \mathbb{C}^n,\ V \subset \mathbb{C}^m$ offen und $r \in C^2(U, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) Ist $f : V \to U$ holomorph, so gilt für alle $z \in V$

$$L_z(r \circ f) = J_f(z)^* L_{f(z)}(r) J_f(z).$$

(b) Ist $f : V \to U$ biholomorph, so ist mit r auch $r \circ f$ streng plurisubharmonisch.

Aufgabe 24 **(4 Punkte)**

Sei $\mathbb{D} = D_1(0)$ der offene Einheitskreis und seien $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ streng pseudokonvex, $p \in \partial\Omega$. Man zeige: Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^n$ holomorph mit $f(0) = p$ und $f(\mathbb{D}) \subset \overline{\Omega}$, so ist f konstant.

(*Hinweis: Man benutze Aufgabe 23, Aufgabe 22 und Aufgabe 10.*)

Aufgabe 25 **(4 Punkte)**

Seien $a \in \mathbb{C}^n,\ R > 0$ und $r = (r_1, \ldots, r_n) \in (0, \infty)^n$. Man zeige, dass die Kugel $B_R(a) \subset \mathbb{C}^n$ streng pseudokonvex ist, aber für $n > 1$ der Polyzylinder $P_r(a) \subset \mathbb{C}^n$ nicht.

(bitte wenden)

Eine beschränkte offene Menge $D \subset \mathbb{C}^n$ besitzt definitionsgemäß einen Rand der Klasse C^k $(k \geq 1)$, *wenn eine C^k-Randfunktion für D existiert, d.h. eine Funktion $r \in C^k(U, \mathbb{R})$ auf einer offenen Menge $U \supset \partial D$ mit $U \cap D = \{z \in U;\ r(z) < 0\}$ und* grad $r(z) \neq 0$ *für alle $z \in \partial D$.*

Aufgabe 26* **(6^*+2^*=8^* Punkte)**

Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ eine beschränkte offene Menge mit C^2-Rand. Man zeige:

(a) Gibt es eine C^2-Randfunktion $r \in C^2(U, \mathbb{R})$ für D mit $\langle L_z(r)t, t\rangle > 0$ für alle $z \in \partial D$ und $t \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $\sum_{j=1}^{n} (\partial_j r)(z) t_j = 0$, so ist D streng pseudokonvex. Zeigen Sie dazu nacheinander:

(i) Sei $\lambda > 0$ und $\varrho = e^{\lambda r} - 1$. Dann gilt für $z \in \partial D$ und $t \in \mathbb{C}^n$

$$\langle L_z(\varrho)t, t\rangle = \lambda \left(\langle L_z(r)t, t\rangle + \lambda \left| \sum_{j=1}^{n} (\partial_j r)(z) t_j \right|^2 \right).$$

(ii) Sei $K = \{(z, t) \in \partial D \times \mathbb{C}^n;\ \|t\| = 1 \text{ und } \langle L_z(r)t, t\rangle \leq 0\}$. Dann ist

$$\inf_{(z,t) \in K} \left| \sum_{j=1}^{n} (\partial_j r)(z) t_j \right| > 0.$$

(iii) Für λ groß genug ist ϱ streng plurisubharmonisch in jedem $z \in \partial D$.

(b) Ist $n = 1$, so ist $D \subset \mathbb{C}$ streng pseudokonvex.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre