UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Banachräume analytischer Funktionen

Sommersemester 2012

Blatt 1 Abgabetermin: Montag, 07.05.2012, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $f \in H^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ nullstellenfrei so, dass auch $\frac{1}{f} \in H^p$. Zeigen Sie, dass f eine äußere Funktion ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $c > 0$ und $1 \leq p \leq \infty$. Sei $\psi \in \mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ eine messbare Funktion mit $\psi(\mathbb{T}) \subset [c, \infty)$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f \in H^p$ existiert mit

$$|f^*| = \psi \ \lambda\text{-fast überall} \quad \text{und} \quad \|f\|_p = \|\psi\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

(*Hinweis: Es ist* $\log x \leq x - 1$ *für alle* $x > 1$.)

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Seien $1 \leq p < q \leq \infty$ und $f \in H^p$ mit $f^* \in L^q(\mathbb{T})$. Zeigen Sie, dass $f \in H^q$.

Seien f, g innere Funktionen. Man sagt f teilt *g, falls es eine innere Funktion h gibt mit $g = fh$.*

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede Familie $(g_i)_{i \in I}$ innerer Funktionen einen bis auf einen Phasenfaktor eindeutig bestimmten größten gemeinsamen Teiler hat.

Aufgabe 5* (6* Punkte)

Für $1 \leq p \leq \infty$ sei

$$h^p = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C};\ f \text{ ist harmonisch mit } \|f\|_p := \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_p < \infty\}.$$

Zeigen Sie, dass h^p bezüglich $\|\cdot\|_p$ ein Banachraum ist, und geben Sie einen isometrischen Isomorphismus $h^p \cong L^p(\mathbb{T})$ für $1 < p \leq \infty$ bzw. $h^1 \cong M(\mathbb{T})$ an.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre