UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Banachräume analytischer Funktionen

Sommersemester 2012

Blatt 3 Abgabetermin: Montag, 11.06.2012, vor der Vorlesung

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Sei $(z_j)_{j\geq 1}$ eine interpolierende Folge für H^∞ und sei B_0 das Blaschke-Produkt zur Nullstellenfolge $(z_j)_{j\geq 1}$. Zeigen Sie: Ist $f_1 \in H^\infty$ eine Funktion mit

$$\inf_{z\in\mathbb{D}} |B_0(z)| + |f_1(z)| > 0,$$

so gibt es Funktionen $g_0, g_1 \in H^\infty$ mit $B_0 g_0 + f_1 g_1 \equiv 1$ auf $\mathbb{D}$.

In der folgenden Aufgabe dürfen Sie benutzen, dass eine Folge $(z_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{D}$ genau dann interpolierend für $H^\infty(\mathbb{D})$ ist, wenn sie die Carleson-Bedingung (C) erfüllt.

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Sei $(z_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Zeigen Sie, dass $(z_k)_{k\geq 1}$ genau dann interpolierend für $H^\infty(\mathbb{H}) = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{H});\ \|f\|_{\mathbb{H}} < \infty\}$ ist, wenn ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\inf_{n,k\geq 1} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{n} \left| \frac{z_k - z_\nu}{z_k - \overline{z_\nu}} \right| > \delta.$$

(*Hinweis: Benutzen Sie eine geeignete konforme Abbildung.*)

Aufgabe 13 (4+4* Punkte)

Sei $(z_j)_{j\geq 1}$ eine interpolierende Folge für H^∞ und sei $M \in \mathbb{R}$ mit

$$M > \sup_{a\in B_{\ell^\infty}} \inf\{\|g\|_\infty;\ g \in H^\infty \text{ mit } g(z_j) = a_j \text{ für alle } j \geq 1\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $n \geq 1$ gibt es Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$ mit $f_j(z_k) = \delta_{j,k}$ für $1 \leq j, k \leq n$ und

$$\sum_{j=1}^{n} |f_j(z)| \leq M^2 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

(*Hinweis: Definieren Sie $f_j = (\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \xi^{-j\nu} g_\nu)^2$ mit $\xi = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ und geeigneten $g_1, \ldots, g_n \in H^\infty$.*)

(b) Benutzen Sie den Satz von Montel und ein Diagonalverfahren, um zu zeigen, dass eine Folge $(f_j)_{j\geq 1}$ in H^∞ existiert mit $f_j(z_k) = \delta_{j,k}$ für alle $j, k \geq 1$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(z)| \leq M^2 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Aufgabe 14 **(4 Punkte)**

Benutzen Sie das Ergebnis von Aufgabe 13, um zu zeigen, dass für jede Folge $(z_j)_{j\geq 1}$, die interpolierend für H^∞ ist, ein stetig linearer Operator $S : \ell^\infty \to H^\infty$ existiert mit $(S\,a)(z_k) = a_k$ für alle $a = (a_j)_{j\geq 1} \in \ell^\infty$ und $k \geq 1$.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre