UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Banachräume analytischer Funktionen

Sommersemester 2012

Blatt 4 Abgabetermin: Montag, 25.06.2012, vor der Vorlesung

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Sei $(z_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{D}$. Zeigen Sie, dass $(z_k)_{k\geq 1}$ die Carleson-Bedingung genau dann erfüllt, wenn es ein $\delta > 0$ gibt so, dass für alle $k \geq 1$ ein $\varphi_k \in B_{H^\infty}$ existiert mit $\varphi_k(z_k) = \delta$ und $\varphi_k(z_j) = 0$ für alle $j \neq k$. (*Hinweis: Benutzen Sie die Blaschke-Produkte B_k zu den Nullstellenfolgen $(z_j)_{j\neq k}$.*)

Aufgabe 16 (2+3+1=6 Punkte)

Sei $(z_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{D}$ und sei

$$R : H^2 \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \quad f \mapsto (f(z_k)(1-|z_k|^2)^{\frac{1}{2}})_{k\geq 1}.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $(z_k)_{k\geq 1}$ interpolierend für H^∞, so ist $R(H^2) = \ell^2$.

(b) Ist $\ell^2 \subset R(H^2)$, so gibt es zu jedem $w \in \ell^2$ eine eindeutige Funktion $f_w \in H^2 \ominus \ker R$ mit $Rf_w = w$. In diesem Fall ist die Abbildung $S : \ell^2 \to H^2$, $w \mapsto f_w$ stetig.

(c) Ist $\ell^2 \subset R(H^2)$, so gilt $\ell^2 = R(H^2)$.

Aufgabe 17 (3+1=4 Punkte)

Sei für $\lambda \in \mathbb{D}$ die Funktion $K_\lambda \in H^2$ definiert durch $K_\lambda(z) = \frac{1}{1-z\overline{\lambda}}$. Zeigen Sie:

(a) $\langle f, K_\lambda\rangle_{H^2} = f(\lambda)$ für alle $f \in H^2$.

(b) $\|K_\lambda\|_2^2 = \frac{1}{1-|\lambda|^2}$.

Aufgabe 18 (2+3* Punkte)

Sei $(z_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{D}$. Sei R definiert wie in Aufgabe 16 und sei $u_k = \frac{K_{z_k}}{\|K_{z_k}\|_2}$ (wie in Aufgabe 17). Zeigen Sie:

(a) Ist $R(H^2) \subset \ell^2$, so ist R stetig.

(b) Die Inklusion $R(H^2) \subset \ell^2$ gilt genau dann, wenn ein $c > 0$ existiert so, dass für alle endlichen Folgen $(a_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{C}$ die Abschätzung $\|\sum_{k\geq 1} a_k u_k\|_2^2 \leq c \sum_{k\geq 1} |a_k|^2$ gilt.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre