UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Banachräume analytischer Funktionen

Sommersemester 2012

Blatt 5 Abgabetermin: Montag, 09.07.2012, vor der Vorlesung

Bei der Bearbeitung der Aufgaben 19 und 20 dürfen Sie die Gültigkeit des Corona-Theorems benutzen.

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Seien $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ zwei Folgen paarweise verschiedener Elemente in $\mathbb{D}$, die beide die Blaschke-Bedingung erfüllen. Seien $A, B \in H^\infty$ die zugehörigen Blaschke-Produkte. Zeigen Sie, dass es genau dann ein $f \in H^\infty$ gibt mit $f(a_n) = 0$ und $f(b_n) = 1$ für alle $n \geq 1$, wenn ein $\delta > 0$ existiert mit $|A(z)| + |B(z)| \geq \delta$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

Aufgabe 20 (2+3=5 Punkte)

Seien $f \in H^\infty$ und $\alpha \in \mathbb{T}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $(z_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{D}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ und $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w \in \mathbb{C}$, so gibt es ein $\varphi \in \Delta_\alpha$ mit $\varphi(f) = w$.

(b) Es gibt ein $w \in \mathbb{C}$ mit $\hat{f}|_{\Delta_\alpha} \equiv w$ genau dann, wenn f stetig fortsetzbar auf $\mathbb{D} \cup \{\alpha\}$ ist.

Aufgabe 21 (2+2+1=5 Punkte)

Sei B das Blaschke-Produkt zur Nullstellenfolge $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ und sei $\alpha \in \mathbb{T}$. Zeigen Sie:

(a) Es konvergiert

$$B(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n} z}$$

kompakt gleichmäßig auf $D_B = \mathbb{C} \setminus \overline{\{1/\overline{\alpha_n};\ n \in \mathbb{N}\}}$. (*Hinweis: Beweis von Satz 7.5.*)

(b) Ist $0 \notin \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{B(D_\varepsilon(\alpha) \cap \mathbb{D})}$, so ist $\alpha \in D_B$ und $|B(\alpha)| = 1$.

(c) Ist $\varphi \in \Delta_\alpha$ mit $\varphi(B) = 0$, so gibt es eine Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{D}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} B(z_n) = 0.$$

(*Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 20.*)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre