Aufgabe 1**(3+2=5 Punkte)**

- (a) Sei $(b_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $0 < b_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_n$, mit $a_n = \prod_{k=0}^n b_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$, konvergiert.
- (b) Konvergiert auch die Folge $(c_n)_n$ mit $c_n = \frac{\sin n}{n+1} \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2**(3+3+2=8 Punkte)**

- (a) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{e^n + e^{-n}}$ auf Konvergenz.
- (b) Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{|a_k a_{k+1}|}$ ebenfalls konvergiert.
(Hinweis: Benutzen Sie die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel.)
- (c) Beweisen oder widerlegen Sie die Umkehrung der vorigen Aussage: Ist $(a_k)_k$ eine Folge derart, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{|a_k a_{k+1}|}$ konvergiert, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Aufgabe 3**(3+3+3=9 Punkte)**

Überprüfen Sie die Existenz der folgenden Grenzwerte und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

$$(i) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 1} \quad (ii) \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ x \neq \frac{\pi}{4}}} \frac{x \tan x - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2})$$

Aufgabe 4**(3+3+2=8 Punkte)**

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig, falls ein $L > 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

für alle $x, y \in D$.

- (a) Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1 + 3x}$ Lipschitz-stetig ist.
(Hinweis: Erweitern Sie den Ausdruck $\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{1 + 3y}$ für $x, y \in [0, \infty)$.)
- (c) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, so existiert der Limes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5**(4+3=7 Punkte)**

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2(1 + \log |x|) & , \text{ falls } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

differenzierbar ist, und berechnen Sie $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- (b) Sei
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- differenzierbar mit
- $f(x) \cdot f'(x) \leq 0$
- für alle
- $x \in \mathbb{R}$
- . Zeigen Sie: Ist
- $f(x_0) = 0$
- für ein
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- , so folgt
- $f(x) = 0$
- für alle
- $x \geq x_0$
- .

(Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}f(x)^2$.)

Aufgabe 6**(4+4=8 Punkte)**

- (a) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und die (maximalen) Monotonieintervalle der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \log(x^2).$$

- (b) Zeigen Sie, dass die Gleichung
- $e^x = 3x$
- genau zwei reelle Lösungen besitzt.
-

Aufgabe 7**(3+4=7 Punkte)**

- (a) Zeigen Sie, dass

$$e^x - 1 < xe^x$$

für alle $x \in (0, \infty)$ gilt.

- (b) Seien
- $I \subset \mathbb{R}$
- ein Intervall und
- $x_0 \in I$
- . Ferner sei
- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$
- eine stetige Funktion, die auf
- $I \setminus \{x_0\}$
- differenzierbar ist. Zeigen Sie: Existiert der Grenzwert
- $c = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \in \mathbb{R}$
- , so ist
- f
- differenzierbar in
- x_0
- mit
- $f'(x_0) = c$
- .

(Hinweis: Betrachten Sie eine beliebige Folge $(x_n)_n$ in $I \setminus \{x_0\}$, die gegen x_0 konvergiert, und benutzen Sie den Mittelwertsatz.)

Aufgabe 8**((3+3)+2=8 Punkte)**

- (a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$

(ii) $\int_3^4 \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$

- (b) Seien
- $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
- stetig und auf
- (a, b)
- differenzierbar mit
- $f(a) \leq g(a)$
- sowie
- $f'(t) \leq g'(t)$
- für alle
- $t \in [a, b]$
- . Zeigen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, dass
- $f(x) \leq g(x)$
- für alle
- $x \in [a, b]$
- gilt.
-

Viel Erfolg!