Aufgabe 1 **(3+2=5 Punkte)**

(a) Sei $(b_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $0 < b_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_n$, mit $a_n = \prod_{k=0}^{n} b_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$, konvergiert.

(b) Konvergiert auch die Folge $(c_n)_n$ mit $c_n = \frac{\sin n}{n+1} \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 **(3+3+2=8 Punkte)**

(a) Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{e^n + e^{-n}}$ auf Konvergenz.

(b) Es sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{|a_k a_{k+1}|}$ ebenfalls konvergiert.
(*Hinweis: Benutzen Sie die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel.*)

(c) Beweisen oder widerlegen Sie die Umkehrung der vorigen Aussage: Ist $(a_k)_k$ eine Folge derart, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{|a_k a_{k+1}|}$ konvergiert, so konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Aufgabe 3 **(3+3+3=9 Punkte)**

Überprüfen Sie die Existenz der folgenden Grenzwerte und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

$$\text{(i)} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 1} \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ x \neq \frac{\pi}{4}}} \frac{x \tan x - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}\right)$$

Aufgabe 4 **(3+3+2=8 Punkte)**

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig, *falls ein $L > 0$ existiert mit*

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

für alle $x, y \in D$.

(a) Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1 + 3x}$ Lipschitz-stetig ist.
(*Hinweis: Erweitern Sie den Ausdruck $\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{1 + 3y}$ für $x, y \in [0, \infty)$.*)

(c) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, so existiert der Limes

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5 **(4+3=7 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2(1 + \log|x|) & , \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

differenzierbar ist, und berechnen Sie $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(x) \cdot f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $f(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so folgt $f(x) = 0$ für alle $x \geq x_0$.
(*Hinweis: Betrachten Sie die Funktion* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2} f(x)^2$.)

Aufgabe 6 **(4+4=8 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und die (maximalen) Monotonieintervalle der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \log(x^2).$$

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $e^x = 3x$ genau zwei reelle Lösungen besitzt.

Aufgabe 7 **(3+4=7 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass

$$e^x - 1 < xe^x$$

für alle $x \in (0, \infty)$ gilt.

(b) Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in I$. Ferner sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $I \setminus \{x_0\}$ differenzierbar ist. Zeigen Sie: Existiert der Grenzwert $c = \lim_{x \to x_0} f'(x) \in \mathbb{R}$, so ist f differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = c$.
(*Hinweis: Betrachten Sie eine beliebige Folge* $(x_n)_n$ *in* $I \setminus \{x_0\}$, *die gegen* x_0 *konvergiert, und benutzen Sie den Mittelwertsatz.*)

Aufgabe 8 **((3+3)+2=8 Punkte)**

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\, dx$

(ii) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2 - 3x + 2}\, dx$

(b) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar mit $f(a) \leq g(a)$ sowie $f'(t) \leq g'(t)$ für alle $t \in [a, b]$. Zeigen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, dass $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Viel Erfolg!