Aufgabe 1 **(4+(1,5+1,5)=7 Punkte)**

(a) Untersuchen Sie die Folge

$$\Big(\frac{2n^3-6n+4}{-4n^3-n^2+2n}+\frac{\exp(\cos(n))}{1-n}\Big)_{n\geq 2}$$

auf Konvergenz.

(b) Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei Folgen reeller Zahlen. Beweisen oder wiederlegen Sie:

(i) Sind $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ divergent, so ist auch $(a_n+b_n)_n$ divergent.

(ii) Ist $(a_n)_n$ konvergent und $(b_n)_n$ divergent, so ist $(a_n+b_n)_n$ divergent.

Aufgabe 2 **(2+(2,5+2,5)+3=10 Punkte)**

(a) Untersuchen Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie auf zwei verschiedene Arten (d.h. benutzen Sie zwei unterschiedliche in der Vorlesung behandelte Kriterien), dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)^n}{n^3+1}$ konvergiert.

(c) Sei $a\in\mathbb{R}$ mit $|a|>1$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2i+1}{(2a+1)^k}$ konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 3 **(3+3=6 Punkte)**

(a) Sei $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ eine monoton wachsende, beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass dann $\sup(f([0,\infty)))=\lim_{x\to\infty}f(x)$ gilt.

(b) Bestimmen Sie das Infimum und das Supremum der Menge $M=\{\frac{x}{1+x};\ x\geq 0\}$.

Aufgabe 4 **(3+4=7 Punkte)**

(a) Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei stetig im Punkt $a\in\mathbb{R}$, und es gelte $f(a)=0$. Ferner sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\cdot g$ im Punkt a stetig ist.

(b) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $\alpha\in\mathbb{R}$, für die die Funktion

$$f_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\begin{cases}\frac{\sin(\pi x)}{x} & \text{, falls } x>0\\ a\sqrt{1-x} & \text{, falls } x\leq 0\end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 5 **(4+3=7 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} |x|(1 + \log(x^2)) & \text{, falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar ist, und berechnen Sie dort die Ableitung von f.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty} \Big((-1)^n n \cdot f((-1)^n \tfrac{1}{n})\Big).$$

Aufgabe 6 **(4+3=7 Punkte)**

(a) Es sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad 4(\sin x)^2 - 4(\sin x)^4.$$

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und die (maximalen) Monotonieintervalle der Funktion $g = f|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ und $f(2) = 1$. Zeigen Sie, dass f' mindestens eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 7 **(3+4=7 Punkte)**

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass

$$\log(1 + x) < x$$

für alle $x > 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die durch $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \log(1 + a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definierte Folge $(a_n)_n$ gegen 0 konvergiert.
(*Hinweis: Beweisen Sie zuerst die Ungleichung $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*)

Aufgabe 8 **(4+2+3=9 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 1}\, dx,$

(b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}}\, dx,$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi \cos(x)\sin(2x)\, dx.$

Viel Erfolg!