UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2013

Blatt 1 Abgabetermin: bis Freitag, 26.04.2013, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (1+1,5+1,5=4 Punkte)

Es seien $k \in \mathbb{N}^*$ und X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, beliebige nichtleere Mengen. Wir schreiben

$$\bigcup_{n=k}^{\infty} X_n = \{x;\ x \in X_n \text{ für mindestens ein } n \geq k\} \quad \text{und}$$
$$\bigcap_{n=k}^{\infty} X_n = \{x;\ x \in X_n \text{ für alle } n \geq k\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcap_{\nu=1}^{n} X_\nu \Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{\nu=1}^{n} X_\nu \Big) = X_1.$

(b) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{\nu=n}^{\infty} X_\nu \Big) = \{x;\ x \in X_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}^*\}.$

(c) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcap_{\nu=n}^{\infty} X_\nu \Big) = \{x;\ x \notin X_n \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N}^*\}.$

Aufgabe 2 (1+2+2+2=7 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion:

(i) Für alle $n \geq 4$ gilt $n! \geq 2^n$.

(ii) Für alle $n \geq 1$ ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k \Big)^2.$

(iii) Für alle $n \geq 2$ ist $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \Big(\frac{k+1}{k-1} \Big)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$

(iv) Für alle $n \geq 1$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}^*$ und seien reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ sowie $b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}$ gegeben. Abkürzend schreiben wir

$$A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j \qquad (1 \leq k \leq n).$$

Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Ist die Menge $K = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ zusammen mit der Addition und der Multiplikation von $\mathbb{R}$ ein Körper? Begründen Sie Ihre Aussage!

Aufgabe 5* (3* Punkte)

Die folgende Aussage ist offensichtlich falsch:

Befindet sich unter n Tieren mindestens ein Elefant, so sind sie alle Elefanten.

Finden und erklären Sie den Fehler im folgenden Induktionsbeweis:
Induktionsanfang: Für $n = 1$ stimmt die Aussage offensichtlich.
Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gelte für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschluss: Seien nun $n + 1$ Tiere gegeben unter denen sich mindestens ein Elefant befindet. Wir ordnen die Tiere so in einer Reihe an, dass sich der Elefant unter den ersten n Tieren befindet. Nach Induktionsvoraussetzung sind dann alle der n ersten Tiere Elefanten. Damit befindet sich auch unter den letzten n Tieren mindestens ein Elefant. Wir wenden die Induktionsvoraussetzung nochmals an und können folgern, dass auch die letzten n Tiere alle Elefanten sind. Es ist gezeigt, dass alle $n + 1$ Tiere Elefanten sind.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss13/ana1