



Übungen zur Vorlesung Analysis I
Sommersemester 2013

Blatt 2

Abgabetermin: bis Freitag, 03.05.2013, vor der Vorlesung

Aufgabe 1

(2+2=4 Punkte)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

- (i) Ist $ad - bc \neq 0$, so ist $cx + d \neq 0$ und $y = \frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- (ii) Ist $ad - bc = 0$, so ist entweder $cx + d = 0$ oder $y = \frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2

(2+1+2=5 Punkte)

(a) Zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass

$$\frac{1}{m^k} \binom{m}{k} < \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

für $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ mit $m < n$ und $2 \leq k \leq n$ erfüllt ist. Gilt die erste Ungleichung auch für $k = 0, 1$?

(b) Beweisen Sie für $m, n \in \mathbb{N}^*$ mit $m < n$ die Ungleichung

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

(Hinweis: Binomialtheorem.)

(c) Zeigen Sie, dass

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt.

(Hinweis: Binomialtheorem und geometrische Summe.)

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Zeigen Sie, dass für alle $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left(\sum_{\nu=1}^n x_{\nu} y_{\nu}\right)^2 \leq \left(\sum_{\nu=1}^n x_{\nu}^2\right) \cdot \left(\sum_{\nu=1}^n y_{\nu}^2\right)$$

(Hinweis: Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\sum_{\nu=1}^n (x_{\nu} - \lambda y_{\nu})^2 \geq 0$. Benutzen Sie dies für ein geschickt gewähltes λ .)

(bitte wenden)

Aufgabe 4**(2+2=4 Punkte)**

Geben Sie die folgenden Mengen reeller Zahlen in Form eines Intervalls (oder einer Vereinigung solcher) an:

(i) $M_1 = \{x \in \mathbb{R}; 5 - 3|x - 6| \leq 3x - 7\}.$

(ii) $M_2 = \{x \in \mathbb{R}; ||x - 5| - 3| \leq 4\}.$

Aufgabe 5***(3* Punkte)**

Für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ seien reelle Zahlen p_n und a_n gegeben mit $p_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$. Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$\frac{p_1 a_1 + \dots + p_n a_n}{p_1 + \dots + p_n} < \frac{p_1 a_1 + \dots + p_{n+1} a_{n+1}}{p_1 + \dots + p_{n+1}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$ erfüllt ist.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

<http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss13/ana1>