



Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2013

Blatt 3

Abgabetermin: bis Freitag, 10.05.2013, vor der Vorlesung

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Ist $n \in \mathbb{N}^*$ und sind $x_1, \dots, x_n \geq 0$ nichtnegative reelle Zahlen, so definieren wir das *arithmetische Mittel* von $x_1, \dots, x_n$ durch

$$a_n = a(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Beweisen Sie die Ungleichung

$$a_n^n \geq x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n.$$

(Hinweis: Man kann einen Induktionsbeweis führen und dabei die Bernoullische Ungleichung auf den Ausdruck $(\frac{a_{n+1}}{a_n})^{n+1} = (1 + \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n})^{n+1}$ anwenden.)

Aufgabe 2

(1+1+1=3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Aussage mit dem Archimedischen Axiom gleichbedeutend ist:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}^*$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$, so muss $a = 0$ sein.

(c) Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}^*$, so muss $a = 0$ sein.

Aufgabe 3

(3+1=4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ eine Folge reeller Zahlen, die gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ der *Cesàro-Mittel*

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

gegen a konvergiert. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

(bitte wenden)

Aufgabe 4

(2+2+1=5 Punkte)

Die *Fibonacci*-Zahlen sind gegeben durch

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

In dieser Folge ist jede Zahl die Summe ihrer beiden Vorgänger (die ersten beiden, 0 und 1, sind vorgegeben). Es handelt sich dabei also um eine *rekursiv definierte* Folge natürlicher Zahlen. Formal ist die n -te Fibonacci-Zahl F_n definiert durch

$$(1) \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

mit den *Anfangsbedingungen* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Sie sollen eine geschlossene Form der Folgenglieder F_n angeben.

- (i) Zeigen Sie durch Einsetzen in die definierende Gleichung (1), dass es genau zwei reelle Zahlen λ und μ gibt, für die die Zahlen $F_n = x^n$ die Gleichung (1) für alle $n \geq 2$ erfüllen.
- (ii) Zeigen Sie, dass für jedes Paar reeller Zahlen $c, d \in \mathbb{R}$ die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = c\lambda^n + d\mu^n$$

die Gleichung $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 2$ erfüllt.

- (iii) Bestimmen Sie Werte von c und d so, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ neben der Gleichung $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 2$, auch die Anfangsbedingungen $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ erfüllt. Geben Sie damit die geschlossene Form der F_n an.

Aufgabe 5*

(1*+2*=3* Punkte)

Benutzen Sie die Definition 4.2 aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass die Folgen $(\frac{3}{4n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\frac{n^2}{n^2+1})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

<http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss13/ana1>