UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2013

Blatt 4 — Abgabetermin: bis Freitag, 17.05.2013, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (1,5+1,5=3 Punkte)

(a) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Es gebe ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$a_{n+1} \leq q \cdot a_n$$

für alle $n \geq N$. Zeigen Sie $a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 2 (1,5+1,5+2=5 Punkte)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{(2n+1)^3(3n+1)}{6n^4+2n^2}$,

(b) $a_n = \frac{(-1)^n(2n+1)^2}{n^2-2}$,

(c) $a_n = \frac{n^2+3^n}{n!}$. (*Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1 (a).*)

Aufgabe 3 (1+2+2+1=6 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}^*$ seien

$$a_n = \sqrt{n+1000} - \sqrt{n}, \quad b_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \quad \text{und} \quad c_n = \sqrt{n+\frac{n}{1000}} - \sqrt{n}.$$

Zeigen Sie, dass $a_n > b_n > c_n$ ist für $1 \leq n < 1000000$, aber

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} c_n = \infty.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 4 **(1,5+1,5=3 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2n+1}}$,

(b) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}$.

Aufgabe 5 **(1+1+2*=2+2* Punkte)**

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es gibt eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (mindestens) den drei Häufungspunkten -8, 22 und 23.

(b) Es gibt eine unbeschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (mindestens) den drei Häufungspunkten -8, 22 und 23.

(c) Es gibt eine monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (d.h. es gilt $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ oder $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$) mit (mindestens) den drei Häufungspunkten -8, 22 und 23.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss13/ana1