



Übungen zur Vorlesung Analysis I
Sommersemester 2013

Blatt 5

Abgabetermin: bis Freitag, 24.05.2013, vor der Vorlesung

Aufgabe 1

(3 Punkte)

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{3}.$$

Aufgabe 2

(1+4=5 Punkte)

Für zwei positive reelle Zahlen $a, b > 0$ bezeichne

$$G(a, b) = \sqrt{ab} \quad \text{das geometrische Mittel und}$$

$$H(a, b) = \frac{2ab}{a+b} \quad \text{das harmonische Mittel von } a \text{ und } b.$$

(a) Beweisen Sie die Ungleichungen

$$G(a, b) \leq \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad H(a, b) \leq \frac{a+b}{2}.$$

(b) Es sei $0 < b < a$. Zeigen Sie, dass durch

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = H(a_n, b_n), \quad b_{n+1} = G(a_{n+1}, b_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

eine monoton wachsende Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine monoton fallende Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert werden, die denselben Grenzwert haben.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst induktiv mit Hilfe von Teil (a), dass $b_n \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.)

Aufgabe 3

(1+(2+1)=4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ gegen eine Zahl $e \in [2, 3]$ konvergiert.

(Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2, Blatt 2.)

(b) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(i) $a_n = (1 + \frac{1}{n^2})^n$. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $1 + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}}$ für alle $n \geq 2$ erfüllt ist.)

(ii) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4

(3+2=5 Punkte)

- (a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen so, dass ein $0 < q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}^*$ existieren mit

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|$$

für alle $n \geq n_0$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

(Hinweis: Weisen Sie zunächst nach, dass die Abschätzung

$$|a_{n_0+k} - a_{n_0+l}| \leq \left(\sum_{j=1}^{k-l} q^{l+j} \right) \cdot |a_{n_0} - a_{n_0-1}|$$

für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \geq l$ erfüllt ist. Folgern Sie daraus, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.)

- (b) Zeigen Sie, dass die durch

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \quad (n \geq 0)$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Eine Menge M heißt abzählbar, falls M endlich ist oder eine bijektive Abbildung $\mathbb{N}^* \rightarrow M$ existiert.

Aufgabe 5*

(4* Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten Intervallschachtelung, dass die Menge $[0, 1]$ (und damit auch $\mathbb{R}$) nicht abzählbar ist.

(Hinweis: Nehmen Sie $[0, 1] = \{x_j; j \in \mathbb{N}^*\}$ mit paarweise verschiedenen $x_j \in [0, 1]$ an und definieren Sie induktiv abgeschlossene Intervalle $I_k = [a_k, b_k] \subset [0, 1]$, $k \in \mathbb{N}^*$, mit $b_k - a_k = \frac{1}{3^k}$ und $x_k \notin I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}^*$.)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

<http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss13/ana1>