UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2013

Blatt 6 Abgabetermin: bis Freitag, 31.05.2013, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (3+2=5 Punkte)

(a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen positiver reeller Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0.$$

Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert.

(b) Untersuchen Sie mit Hilfe von Teil (a) die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^4 - n^3 + 5n + 1}{4n^5 + 3n^2 + 1} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 2n + 6}$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 2 (1+1+1+2+2*=5+2* Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)^3}{3^n}, \qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n^2}, \qquad (c)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n},$$

$$(d)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \qquad (e)\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^2}.$$

(*Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2, Blatt 2 für Teil (c). Zeigen Sie in (d), dass* $\sqrt[n]{(\frac{n}{n+1})^{n^2}} < q$ *für alle* $n \in \mathbb{N}^*$ *und ein geeignetes* $q \in [0,1)$ *gilt.*)

Aufgabe 3 (2+2=4 Punkte)

Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n$ konvergiert, und berechnen Sie den Reihenwert.

(*Hinweis: Betrachten Sie die Folge der Partialsummen und schreiben Sie* $n = \sum\limits_{k=1}^{n} 1$. *Vertauschen Sie anschließend die beiden Summen und benutzen Sie die bereits bekannte Formel für die geometrische Summe.*)

(bitte wenden)

Aufgabe 4 **(2+1+1=4 Punkte)**

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen derart, dass die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2$ konvergieren. Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ ist absolut konvergent,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ ist konvergent,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ ist konvergent.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss13/ana1