UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2013

Blatt 7 Abgabetermin: bis Freitag, 07.06.2013, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (1+3=4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{x^2+y^2}$ für alle $x, y > 0$ gilt.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, jedoch ihr Cauchy-Produkt mit sich selbst

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{mit} \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

divergiert.

Aufgabe 2 (1+2+2=5 Punkte)

Bestimmen Sie das Infimum und das Supremum der folgenden Mengen. Untersuchen Sie jeweils, ob es sich dabei um ein Minimum bzw. ein Maximum handelt.

(i) $M_1 = \{t \in \mathbb{R};\ -7 < t < -3 \text{ oder } -2 \leq t \leq 2\}$.

(ii) $M_2 = \{(-1)^n + \frac{1}{m};\ m, n \in \mathbb{N}^*\}$.

(iii) $M_3 = \{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2^m};\ m, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Aufgabe 3 (2+2=4 Punkte)

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ zwei nichtleere beschränkte Mengen und sei $\lambda \neq 0$. Zeigen Sie:

(a) Im Falle $\lambda > 0$ gilt für die Menge $\lambda A = \{\lambda x;\ x \in A\}$

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A \quad \text{und} \quad \inf(\lambda A) = \lambda \inf A,$$

während im Falle $\lambda < 0$

$$\sup(\lambda A) = \lambda \inf A \quad \text{und} \quad \inf(\lambda A) = \lambda \sup A$$

gilt.

(b) Für die Menge $A + B = \{x + y;\ x \in A, y \in B\}$ gilt

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B) \quad \text{und} \quad \sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

(bitte wenden)

Aufgabe 4 **(1+3=4 Punkte)**

Sei $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Es gilt

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\limsup_{n\to\infty} (-x_n) \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = -\liminf_{n\to\infty} (-x_n).$$

(b) Die Zahl μ ist genau dann Limes superior der Folge $(x_n)_n$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$x_n > \mu - \varepsilon$$

für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, die Ungleichung

$$x_n > \mu + \varepsilon$$

jedoch nur für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt. Formulieren Sie ein entsprechendes Kriterium für den Limes inferior.

Aufgabe 5 **(4*+3*=7* Punkte)**

(a) Sei $(a_{k,n})_{k,n\in\mathbb{N}^*}$ eine reelle Doppelfolge mit den folgenden Eigenschaften:

(i) der Limes $a_k = \lim_{n\to\infty} a_{k,n}$ existiert für alle $k \in \mathbb{N}^*$,

(ii) es existieren positive reelle Zahlen $M_k > 0$ mit $|a_{k,n}| \leq M_k$ für alle $k, n \in \mathbb{N}^*$ und $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$.

Zeigen Sie, dass

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ eine konvergente Reihe ist, und dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

konvergieren und den gleichen Grenzwert besitzen.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a), dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Betrachten Sie dazu $a_{k,n} = \binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k$ für $k, n \in \mathbb{N}^*$.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss13/ana1