UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2013

Blatt 9 Abgabetermin: bis Freitag, 21.06.2013, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (1+4=5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ein $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ existiert mit $a < x < b$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x & \text{, falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

genau in 0 stetig ist.

Aufgabe 2 (2+2+2=6 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ nicht leer und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Zeigen Sie:

(a) Ist $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in D, so ist auch $(f(x_n))_n$ eine Cauchy-Folge.

(b) Ist D beschränkt, so ist auch f beschränkt.

Zeigen Sie durch Gegenbeispiele, dass die Aussagen aus (a) und (b) im Allgemeinen falsch sind, wenn von f keine gleichmäßige, sondern nur normale Stetigkeit gefordert wird.

Aufgabe 3 (2+2=4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie:

(a) Die einseitigen Grenzwerte

$$\alpha = \lim_{x \downarrow a} f(x) \quad \text{und} \quad \beta = \lim_{x \uparrow b} f(x)$$

existieren. (*Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2.*)

(b) Es gibt genau eine gleichmäßig stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = f(x)$ für alle $x \in (a, b)$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 **(4×1=4 Punkte)**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^x$,

(b) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^{(x^x)}$,

(c) $\lim\limits_{x\uparrow 1} \exp(-\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n)$,

(d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{9}{x}(\frac{3}{(x+3)^3} - \frac{1}{9})$.

Aufgabe 5 **(2*+2*=4* Punkte)**

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

(a) $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\log x}$.

(b) $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$.

(*Hinweis: Sie dürfen in dieser Aufgabe die aus der Schule bekannten Eigenschaften der Sinusfunktion benutzen.*)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss13/ana1