UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2013

Blatt 10 Abgabetermin: bis Freitag, 28.06.2013, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (4×1=4 Punkte)

Seien $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$,

(b) $\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$,

(c) $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$,

(d) $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-k} \cosh t = \lim\limits_{t\to\infty} t^{-k} \sinh t = \infty$.

Aufgabe 2 (1+2=3 Punkte)

(a) Seien $u, v, w \in \mathbb{C}$ mit $u \neq 0$ und $c = -\frac{w}{u} + (\frac{v}{2u})^2$. Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C}$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

  (i) $uz^2 + vz + w = 0$.

  (ii) $(z + \frac{v}{2u})^2 = c$.

(b) Sei $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben in der Form (Polardarstellung)

$$c = |c| \cdot e^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^2 = c$ genau zwei Lösungen z und $-z$ in $\mathbb{C}$ besitzt mit

$$z = \sqrt{|c|} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}.$$

Aufgabe 3 (1+2+2=5 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2 alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen.

(a) $z^2 = 50i$,

(b) $z^2 + 3iz = 2$,

(c) $(3+i)z^2 + (-22+6i)z + (25-25i) = 0$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 **(1+4=5 Punkte)**

Zeigen Sie:

(a) Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

(b) Für alle $z \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ (mit $2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}\}$) und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x) \cdot \sin(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x) \cdot \cos(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Sie dürfen benutzen, dass $\{x \in \mathbb{R};\ e^{ix} = 1\} = 2\pi\mathbb{Z}$ ist.

(*Hinweis: Wenden Sie Teil (a) mit* $z = e^{ix}$ *an und benutzen Sie, dass* $e^{it} - 1 = (e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}})e^{i\frac{t}{2}}$ *für* $t \in \mathbb{R}$.)

Aufgabe 5 **(2*+2*=4* Punkte)**

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$ approximierbar in D. Zeigen Sie, dass für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$ existiert.

(ii) Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ derart, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss13/ana1