UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2013

Blatt 11 Abgabetermin: bis Freitag, 05.07.2013, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (2+2+2=6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$,

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin|x|$,

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{, falls } x \geq 0 \\ 2 - e^{-x} & \text{, sonst.} \end{cases}$.

Aufgabe 2 (6×1=6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen in jedem Punkt ihres maximalen Definitionsbereiches auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

(a) $f_1(x) = \sinh x$,

(b) $f_2(x) = (x^2 + 3x - 7)\tan x$,

(c) $f_3(x) = \cos(\log x)$,

(d) $f_4(x) = x^x$,

(e) $f_5(x) = (x^x)^x$,

(f) $f_6(x) = x^{(x^x)}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & \text{, falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Untersuchen Sie die Funktion $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

(bitte wenden)

*Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir setzen $f^{(0)} = f$. Ist $f^{(n)}$ definiert für ein $n \in \mathbb{N}$ und ist $f^{(n)}$ differenzierbar auf D, so heißt die durch $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$ auf D definierte Funktion die $(n+1)$-*te Ableitung von f auf D. *In diesem Fall heißt f $(n+1)$-mal differenzierbar.*

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei n-mal auf $D \subset \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass die Funktion $fg : D \to \mathbb{R}$ ebenfalls n-mal differenzierbar auf D ist mit

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

für alle $x \in D$. (*Hinweis: Führen Sie einen Induktionsbeweis und benutzen Sie die Produktregel.*)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss13/ana1