UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Sommersemester 2013

Blatt 14 Abgabetermin: keine Abgabe

Dieses Übungsblatt dient als Vorbereitung auf die Klausur. Ihre Lösungen werden nicht korrigiert und es werden keine Punkte vergeben.

Aufgabe 1

Seien $(a_n)_n$ und $(s_n)_n$ Folgen in $[0, \infty)$ derart, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} s_k$ konvergiert und $a_n \geq a_{n+1} - s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie, dass $(a_n)_n$ konvergiert.

(*Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Folge* $(b_n)_n$ *mit* $b_n = a_n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} s_k$ *für* $n \in \mathbb{N}$.)

Aufgabe 2

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+5n+1}{3-3n^2} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+2}{n^2+2n} \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei $a_n = \sum_{k=1}^{n} kn$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ konvergiert.

Aufgabe 3

Überprüfen Sie die Existenz der folgenden Grenzwerte und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

$$\text{(i)} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{\log x} \qquad \text{(iii)} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}} \qquad \text{(iv)} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \exp(-\tfrac{1}{x})$$

Aufgabe 4

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x)^2 = g(x)^2 \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass $f = g$ oder $f = -g$ gilt.

(b) Es seien $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass auch die Funktion $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass ein $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $\sqrt{|1 + 3\cos x|} = \frac{3}{2}$.

Aufgabe 5

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x+y)=f(x)+f(y)$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $f(0)=0$ sowie $f(x-y)=f(x)-f(y)$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$.

(b) Ist f differenzierbar in 0, so ist f differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$, und es gilt $f'(x)=f'(0)$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

(c) Ist f differenzierbar, so existiert ein $a\in\mathbb{R}$ mit $f(x)=ax$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Aufgabe 6

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und die (maximalen) Monotonieintervalle der Funktion

$$f:\mathbb{R}\setminus\{6\}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\frac{x^3}{x-6}.$$

(b) Sei $a\in\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^6+ax-1$, genau zwei Nullstellen hat.

Aufgabe 7

(a) Zeigen Sie, dass $x\le\tan x$ für alle $x\in[0,\frac{\pi}{2})$ gilt.

(b) Seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$ und sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktion mit $f(a)=f(b)=0$. Zeigen Sie, dass zu jeder natürlichen Zahl $n\in\mathbb{N}$ ein $\xi_n\in(a,b)$ existiert mit

$$f'(\xi_n)=n\cdot f(\xi_n).$$

(*Hinweis: Betrachten Sie zu $n\in\mathbb{N}$ die Funktion $g_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)\exp(-nx)$.*)

Aufgabe 8

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x+6}{x^2-4}\,dx$

(ii) $\displaystyle\int_{0}^{4\pi}t\sin t\cos t\,dt$ (*Hinweis*: Integrieren Sie zweimal partiell.)

(b) Seien $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass ein $\xi\in(0,1)$ existiert mit

$$\int_0^1 f(t)\,dt\cdot\int_0^1 g(t)\,dt=g(\xi)\int_0^{\xi}f(t)\,dt+f(\xi)\int_0^{\xi}g(t)\,dt.$$

(*Hinweis*: Betrachten Sie $F\cdot G$ für geeignete Stammfunktionen F,G von f bzw. g.)

Hinweise:

- Die Klausur findet am Donnerstag dem 01.08.2013 zwischen 9:15 und 12:15 Uhr in den Hörsälen I, II und III der Mathematik (Gebäude E2 5) statt. Die Verteilung auf die Hörsäle richtet sich nach dem Anfangsbuchstaben des Familiennamens und wird durch Aushang bekannt gegeben.
- Sie dürfen für diese Klausur als einziges Hilfsmittel ein von Ihnen selbst handgeschriebenes DIN A4 Blatt benutzen. Bringen Sie Ihr eigenes Papier sowie Ihren Personalausweis und Studentenausweis mit.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/ss13/ana1