1 Metrische Räume

Sei X eine nichtleere Menge.

Definition 1.1. Eine Abbildung: $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik* auf X, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

(i) $d(x, y) \geq 0$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$,

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung),

(iv) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$ ist.

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) aus einer Menge $X \neq \varnothing$ und einer Metrik d auf X.

Beispiele 1.2. Einfache Beispiele metrischer Räume sind

(a) $\mathbb{R}$ zusammen mit der Betragsmetrik $d(x, y) = |x - y|$,

(b) $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit der Summenmetrik $d((x_i), (y_i)) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

(c) Ist (X, d) ein metrischer Raum und ist $A \subset X$ eine nichtleere Teilmenge, so definiert $d_A : A \times A \to \mathbb{R},\ d_A(x, y) = d(x, y)$ eine Metrik auf A (*Relativmetrik* von d auf A).

(d) Ist $X \neq \varnothing$ eine beliebige Menge, so definiert $d : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = 0 \text{ für } x = y,\ d(x, y) = 1 \text{ für } x \neq y$$

eine Metrik auf X (die *triviale* oder *diskrete* Metrik auf X).

Definition 1.3. Sei V ein Vektorraum über dem Körper $K = \mathbb{R}$ der reellen oder über dem Körper $K = \mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$$

heißt *Norm* auf V, falls für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$ gilt

(i) $\|x\| \geq 0$,

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

(iv) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.

Ein *normierter K-Vektorraum* ist ein Paar $(V, \|\cdot\|)$ bestehend aus einem K-Vektorraum V und einer Norm $\|\cdot\|$ auf V.

Aus der in (iii) geforderten Dreiecksungleichung folgt sehr einfach die Dreiecksungleichung nach unten. Für alle $x, y \in V$ gilt

$$|\ \|x\| - \|y\|\ | \ \leq\ \|x-y\|.$$

Zum Beweis beachte man, dass $\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$ und daher auch $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$ gilt und dass man durch Vertauschen der Rollen von x und y auch die Abschätzung $\|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|$ erhält.

Lemma 1.4. *Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter K-Vektorraum, so definiert*

$$d : V \times V \to \mathbb{R},\ \ d(x,y) = \|x-y\|$$

eine Metrik auf V.

Beweis. Die Dreiecksungleichung für d folgt direkt aus der Dreiecksungleichung für die Norm, denn für alle $x, y, z \in V$ gilt

$$d(x,y) = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y).$$

Die übrigen Eigenschaften einer Metrik rechnet man genauso einfach nach. $\square$

Beispiele 1.5. (a) Auf $\mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) werden Normen definiert durch

$$\begin{array}{lcll}
\|(x_i)_{i=1}^n\|_1 & = & \sum_{i=1}^n |x_i| & (\textit{Summennorm}),\\
\|(x_i)_{i=1}^n\|_2 & = & \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} & (\textit{euklidische Norm}),\\
\|(x_i)_{i=1}^n\|_\infty & = & \max_{i=1,\dots,n} |x_i| & (\textit{Maximumnorm}).
\end{array}$$

Wir beweisen nur die Dreiecksungleichung für die euklidische Norm. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt offensichtlich die Ungleichung

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right).$$

Damit folgt für beliebige Elemente $x = (x_i)_{i=1}^n,\ y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|x\|_2}\ \frac{|y_i|}{\|y\|_2} \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^2}{\|x\|_2^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{|y_i|^2}{\|y\|_2^2} = 1$$

oder äquivalent

$$\sum_{i=1}^n |x_i|\ |y_i| \leq \|x\|_2\ \|y\|_2.$$

Für beliebige Vektoren $x = (x_i)_{i=1}^n,\ y = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ folgt damit

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)(\overline{x}_i + \overline{y}_i) \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{i=1}^n |y_i|^2 + 2\sum_{i=1}^n \mathrm{Re}\ (x_i \overline{y}_i) \\
&\leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\sum_{i=1}^n |x_i|\ |y_i| \\
&\leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2\ \|y\|_2 \\
&= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 .
\end{aligned}$$

Da die Wurzelfunktion monoton wächst, folgt die behauptete Dreiecksungleichung für die euklidische Norm.

(b) Sei V ein K-Vektorraum ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) mit Skalarprodukt, das heißt einer Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, für die gilt

$$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle,\ \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle,$$

$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle},\ \langle x, y\rangle \geq 0,\ \langle x, x\rangle = 0 \text{ genau dann, wenn } x = 0.$$

In der Linearen Algebra zeigt man, dass durch

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R},\ \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

eine Norm auf V definiert wird.

Bemerkung 1.6. Für alle $x \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\begin{aligned}
\|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\
\|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.
\end{aligned}$$

Im Folgenden seien $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$, wenn nichts anderes gesagt wird, immer mit der *euklidischen Metrik*

$$d_2(x, y) = \|x - y\|_2$$

versehen. Für die euklidische Norm schreiben wir einfach $\|x\|$ statt $\|x\|_2$.

Beispiele 1.7. Sei $X \neq \varnothing$ eine Menge und sei $B(X) = \{f;\ f : X \to \mathbb{R} \text{ beschränkt } \}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf X (mit den punktweise definierten Verknüpfungen). Dann definiert

$$\|\cdot\|_X : B(X) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \|f\|_X = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

eine Norm auf $B(X)$ (die *Supremumnorm*). Zum Beweis der Dreiecksungleichung beachte man, dass für alle $f, g \in B(X)$ gilt

$$\|f+g\|_X = \sup_{x\in X} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in X} (|f(x)|+|g(x)|) \leq \|f\|_X + \|g\|_X.$$

Lemma 1.8. *Sei $p \in (1,\infty)$ und sei q der zu p konjugierte Exponent, das heißt die reelle Zahl $q > 1$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Dann gilt für alle $a, b > 0$ die Ungleichung*

$$a^{1/p}\, b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Beweis. Zum Beweis dürfen wir annehmen, dass $a \geq b$ ist (sonst vertausche man a mit b und p mit q). Da $\frac{1}{p}-1<0$ ist, folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für $x \geq 1$

$$x^{\frac{1}{p}} - 1 = \int_1^x \left(t^{\frac{1}{p}}\right)' dt = \int_1^x \frac{1}{p}\, t^{\frac{1}{p}-1} dt \leq \int_1^x \left(\frac{t}{p}\right)' dt = \frac{x}{p} - \frac{1}{p}.$$

Wegen $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ impliziert dies, dass $x^{1/p} \leq \frac{x}{p}+\frac{1}{q}$ für alle $x \geq 1$ gilt. Insbesondere folgt hieraus für $x = \frac{a}{b}$ die Abschätzung

$$a^{\frac{1}{p}}\, b^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} b \leq \frac{1}{p}\,\frac{a}{b}\, b + \frac{1}{q}\, b = \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Indem man Lemma 1.8 anwendet mit a^p und b^q statt a und b, sieht man, dass für alle reellen Zahlen $a, b > 0$ gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Beispiele 1.9. (a) Sei $p \in [1,\infty)$ und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$C[a,b] = \{f;\ f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

wird eine Norm definiert durch

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis. Wir beweisen nur die Dreiecksungleichung. Für $p = 1$ folgt die Dreiecksungleichung direkt aus der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag in $\mathbb{R}$ und der Monotonie des Riemannintegrals. Sei also $p \in (1,\infty)$. Sei $q > 1$ der konjugierte Exponent zu p wie in Lemma 1.8. Wir fixieren zwei Funktionen $f, g \in C[a,b]$ und zeigen zunächst, dass

$$\int_a^b |fg| dt \leq \|f\|_p\, \|g\|_q \quad \text{(Höldersche Ungleichung).}$$

Zum Beweis dürfen wir annehmen, dass $f \not\equiv 0 \not\equiv g$. Mit Lemma 1.8 folgt zunächst, dass

$$\frac{|f|}{\|f\|_p}\,\frac{|g|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\,\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\,\frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$$

punktweise auf $[a,b]$ gilt. Mit der Monotonie und Linerarität des Riemannintegrals erhält man die Höldersche Ungleichung

$$\int_a^b \frac{|fg|}{\|f\|_p\|g\|_q}dt \le \frac{1}{p}\int_a^b \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}dt + \frac{1}{q}\int_a^b \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}dt = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Mit der Hölderschen Ungleichung zeigen wir, dass

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \text{(Minkowskische Ungleichung)}$$

ist. Indem man benutzt, dass $\frac{p}{q} = p\left(1-\frac{1}{p}\right) = p-1$ ist, erhält man für alle $t \in [a,b]$ die Ungleichung

$$|f(t)+g(t)|^p \le |f(t)|\ |f(t)+g(t)|^{\frac{p}{q}} + |g(t)|\ |f(t)+g(t)|^{\frac{p}{q}}.$$

Durch Integrieren erhält man unter Anwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt &\le \int_a^b |f(t)|\ |f(t)+g(t)|^{\frac{p}{q}} dt + \int_a^b |g(t)|\ |f(t)+g(t)|^{\frac{p}{q}} dt \\ &\le (\|f\|_p + \|g\|_p)\ \left(\int_a^b |f+g|^p dt\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt sehr leicht die Minkowskische Ungleichung und damit die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p$. Es genügt, im Falle $f \ne -g$ durch das letzte in der obigen Ungleichungskette auftretende Integral zu dividieren. □

(b) Ganz ähnlich wie im Teil (a) folgt, dass für $1 \le p < \infty$ durch

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \|(x_i)_{i=1}^n\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

Definition 1.10. Sei (X,d) ein metrischer Raum und seien $a \in X$ ein Punkt in $X, U \subset X,\ F \subset X$ zwei Teilmengen von X.

(a) Für $r > 0$ (bzw. $r \ge 0$) nennt man

$$B_r(a) = \{x \in X;\ d(x,a) < r\} \text{ (bzw. } \overline{B}_r(a) = \{x \in X;\ d(x,a) \le r\})$$

die *offene* (bzw. *abgeschlossene*) *Kugel* mit Radius r um a.

(b) Die Menge U heißt *Umgebung* von a, falls ein $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(a) \subset U$.

(c) Man nennt die Menge $U \subset X$ offen, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ gibt mit $B_\epsilon(x) \subset U$. Die Menge $F \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $X \setminus F \subset X$ eine offene Menge ist.

Beispiele 1.11. (a) Offene Kugeln in metrischen Räumen sind offene Teilmengen, denn ist $x \in B_r(a)$, so ist $s = r - d(x,a) > 0$ und mit der Dreiecksungleichung folgt für alle $y \in B_s(x)$:

$$d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < s + d(x,a) = r.$$

(b) Ganz ähnlich folgt mit der Dreiecksungleichung, dass jede abgeschlossene Kugel in einem metrischen Raum X eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.

(c) Die offenen Kugeln in $\mathbb{R}$ (bezüglich der Betragsmetrik) sind genau die offenen Intervalle $(a,b) \subset \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

(d) Das halboffene Intervall $[0,1[$ ist als Teilmenge des metrischen Raumes $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen.

Satz 1.12. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Dann gibt es Umgebungen U von x, V von y in X mit $U \cap V = \varnothing$.*

Beweis. Für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ist $\epsilon = d(x,y) > 0$ und $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(y) = \varnothing$, denn gäbe es einen Punkt $z \in B_{\epsilon/2}(x) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(y)$, so wäre

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon = d(x,y).$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$ und $B_{\frac{\epsilon}{2}}(y)$ disjunkte Umgebungen von x und y sind. $\square$

Definition 1.13. Zwei Metriken d_1, d_2 auf einer Menge X heißen *äquivalent*, falls es eine Konstante $c > 0$ gibt so, dass für alle $x, y \in X$ gilt

$$\frac{1}{c} d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c d_1(x,y).$$

Beispiel.
Nach Bemerkung 1.6 sind auf $\mathbb{R}^n$ die Metriken

$$d_1(x,y) = \|x-y\|_1,\ d_2(x,y) = \|x-y\|_2,\ d_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty.$$

äquivalent.
Bemerkung.
Sind d_1, d_2 äquivalente Metriken auf X, so besitzen die metrischen Räume (X, d_1), (X, d_2) dieselben offenen Mengen. Zum Beweis beachte man, dass für jedes $a \in X$ und jede positive reelle Zahl $\epsilon > 0$ die Inklusionen

$$B^{d_1}_{\epsilon/c}(a) \subset B^{d_2}_{\epsilon}(a),\ B^{d_2}_{\epsilon/c}(a) \subset B^{d_1}_{\epsilon}(a)$$

gelten, falls $c > 0$ eine Konstante wie in Definition 1.13 ist.

Satz 1.14. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gilt:*

(a) *(i)* *$\varnothing, X$ sind offen in X.*

(ii) *Sind $U, V \subset X$ offen, so ist auch $U \cap V \subset X$ offen.*

(iii) *Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie offener Mengen in X, so ist auch $\bigcup_{i\in I} U_i \subset X$ offen.*

(b) *(i)* *$\varnothing, X$ sind abgeschlossen in X.*

(ii) *Sind $F, G \subset X$ abgeschlossen, so ist auch $F \cup G \subset X$ abgeschlossen.*

(iii) *Ist $(F_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie abgeschlossener Mengen in X, so ist auch $\bigcap_{i\in I} F_i \subset X$ abgeschlossen.*

Beweis. (a) Offensichtlich sind $\varnothing, X \subset X$ offen. Sind $U, V \subset X$ offen und ist $x \in U \cap V$, so gibt es $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ mit $B_{\epsilon_1}(x) \subset U,\ B_{\epsilon_2}(x) \subset V$. Dann ist $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset U \cap V$. Sind $U_i \subset X (i \in I)$ offen und ist $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$, so gibt es ein $i_0 \in I$ und ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

(b) Die in (b) behaupteten Eigenschaften abgeschlossener Mengen folgen aus Teil (a) durch Übergang zu Komplementen. □

Nicht endliche Durchschnitte offener Mengen sind im Allgemeinen nicht offen. So ist etwa

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

ein abzählbarer Durchschnitt offener Mengen in $\mathbb{R}$, der nicht offen ist.
Bezüglich den euklidischen Metriken auf $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^{n+m}$ gilt für beliebige Elemente $a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m$ und jede reelle Zahl $\epsilon > 0$

$$B_{\frac{\epsilon}{2}}(a) \times B_{\frac{\epsilon}{2}}(b) \subset B_\epsilon(a,b) \subset B_\epsilon(a) \times B_\epsilon(b).$$

Die erste Inklusion folgt aus den Abschätzungen

$$\|(x,y) - (a,b)\| = \|(x-a, 0) + (0, y-b)\| \le \|x-a\| + \|y-b\|,$$

die zweite folgt aus

$$\max(\|x-a\|, \|y-b\|) \le \|(x-a, y-b)\| = \|(x,y) - (a,b)\|.$$

Lemma 1.15. *(a) Sind $F \subset \mathbb{R}^n,\ G \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossene Mengen, so ist $F \times G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ abgeschlossen.*

(b) Sind $U \subset \mathbb{R}^n,\ V \subset \mathbb{R}^m$ offen, so ist $U \times V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen.

Beweis. (a) Ist $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus (F \times G)$, so ist $x \notin F$ oder $x \notin G$. Also gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$ oder $B_\epsilon(y) \subset \mathbb{R}^m \setminus G$. Dann ist aber $B_\epsilon((x,y)) \subset B_\epsilon(x) \times B_\epsilon(y) \subset \mathbb{R}^{n+m} \setminus (F \times G)$.

(b) Ist $(x,y) \in U \times V$, so gibt es $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ mit $B_{\epsilon_1}(x) \subset U$ und $B_{\epsilon_2}(y) \subset V$. Dann ist $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$ und $B_\epsilon((a,b)) \subset B_\epsilon(x) \times B_\epsilon(y) \subset U \times V$. □

Indem man Lemma 1.15 mehrfach (induktiv) anwendet, sieht man, dass in $\mathbb{R}^n$ Mengen der Form

$$\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n \quad (\textit{abgeschlossene Quader})$$

abgeschlossen und Mengen der Form

$$\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i[\quad (\textit{offene Quader})$$

offen sind.

Definition 1.16. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Man definiert

$$\begin{aligned}
\overline{M} &= \{x \in X;\ \text{für jede Umgebung } U \text{ von } x \text{ ist } U \cap M \neq \varnothing\} \quad (\text{Abschluss von } M),\\
\operatorname{Int}(M) &= \{x \in X;\ \text{es gibt eine Umgebung } U \text{ von } x \text{ mit } U \subset M\} \quad (\text{Inneres von } M),\\
\partial M &= \{x \in X;\ \text{für jede Umgebung } U \text{ von } x \text{ ist } U \cap M \neq \varnothing \neq U \cap (X \setminus M)\} \quad (\text{Rand von } M).
\end{aligned}$$

Lemma 1.17. *Für $M \subset X$ gilt*

(a) $\overline{M} = \bigcap(F \subset X$ abgeschlossen; $M \subset F)$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält.

(b) $\operatorname{Int}(M) = \bigcup(U \subset X$ offen; $U \subset M)$ ist die größte offene Menge in X, die in M enthalten ist.

(c) $\partial M \subset X$ ist abgeschlossen.

(d) $\overline{M} = M \cup \partial M$ und $\operatorname{Int}(M) = M \cap (X \setminus \partial M)$.

Beweis. (a) Sei $x \in \overline{M}$ und $F \supset M$ eine abgeschlossene Menge in X. Die Annahme, dass $x \in X \setminus F$ gilt, führt zu dem Widerspruch, dass $(X \setminus F) \cap M \neq \varnothing$ sein müsste. Also liegt x im Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von M. Sei x umgekehrt enthalten in diesem Durchschnitt und sei U eine Umgebung von x. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset U$. Wäre $U \cap M = \varnothing$, so wäre $X \setminus B_\epsilon(x) \supset M$ eine abgeschlossene Obermenge von M und folglich wäre $x \in X \setminus B_\epsilon(x)$. Dieser Widerspruch zeigt, dass $x \in \overline{M}$. Der Durchschnitt in (a) ist nach Satz 1.14 (b) abgeschlossen und ist offensichtlich in jeder abgeschlossenen Obermenge von M enthalten.

(b) Die behauptete Darstellung von $\operatorname{Int}(M)$ folgt direkt aus der Definition des Inneren und Satz 1.14 (a).

(c) Ist $x \subset X \setminus \partial M$, so gibt es eine offene Umgebung U von x mit $U \cap M = \varnothing$ oder $U \cap (X \setminus M) = \varnothing$. Da eine offene Menge Umgebung jedes ihrer Punkte ist, ist $U \subset X \setminus \partial M$. Als Vereinigung offener Mengen ist $X \setminus \partial M$ offen und daher $\partial M \subset X$ abgeschlossen.

(d) Direkt aus den Definitionen folgt, dass

$$\operatorname{Int}(M) \cap \partial M \subset M \cap \partial M \subset \overline{M}.$$

Ist $x \in \overline{M} \setminus \partial M$, so gibt es eine Umgebung U von x mit $U \cap (X \setminus M) = \varnothing$. Also ist $U \subset M$ und $x \in \operatorname{Int}(M)$. Damit ist die Gleichheit aller drei Mengen gezeigt. Offensichtlich ist $\operatorname{Int} \subset M \cap (X \setminus \partial M)$. Die umgekehrte Inklusion wurde gerade gezeigt. □

Korollar 1.18. *Eine Teilmenge $M \subset X$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $M = \overline{M}$ ist.*

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus Lemma 1.17 (a). □

Beispiele.

(a) In $\mathbb{R}^n$ ist $\partial B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - a\| = r\} = \partial \overline{B}_r(a)$.

(b) Der Rand von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$.

(c) Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist $\overline{]a, b[} = [a, b]$, falls $a < b$ ist, und $\operatorname{Int}([a, b]) =]a, b[$, falls $a \leq b$ ist.

Definition 1.19. Sei $X \neq \varnothing$ eine nichtleere Menge. Ein System

$$t \subset \mathcal{P}(X)\ (= \{A;\ A \subset X\})$$

heißt *Topologie* auf X, falls

(i) $\varnothing, X \in t$,

(ii) für $U, V \in t$ auch $U \cap V \in t$ gilt,

(iii) für jede Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Mengen $U_i \in t$ auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in t$ gilt.

Nach Satz 1.14 bilden für einen metrischen Raum (X, d) die offenen Mengen $U \subset X$ eine Topologie auf X. Es gibt Topologien, die nicht von einer Metrik induziert werden. Zum Beispiel ist $t = \{X, \varnothing\}$ eine Topologie auf X, aber nach Satz 1.12 kann es, wenn X mehr als ein Element enthält, keine Metrik auf X geben, bezüglich der nur die Mengen X und $\varnothing$ offen sind.