10 Mehrdimensionale Riemann-Integrale

Sei $Q = \prod_{\nu=1}^n [a_\nu, b_\nu] \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader und $T = (T_1, \dots, T_n)$ eine Teilung von Q, das heißt für $\nu = 1, \dots, n$ sei

$$T_\nu = (t_{\nu,i})_{i=0}^{r_\nu}$$

eine Teilung von $[a_\nu, b_\nu]$. Wie zuvor definieren wir

$$\omega(T) = \max_{\nu=1,\dots,n} \omega(T_\nu) \quad (\textit{Spurweite} \text{ von } T),$$

$$I = I(T) = \prod_{\nu=1}^n \{1, \dots, r_\nu\}.$$

Wir nennen die Menge

$$\mathcal{T} = \left\{ \prod_{\nu=1}^n [t_{\nu,i_\nu - 1}, t_{\nu,i_\nu}];\ (i_1, \dots, i_n) \in I(T) \right\}$$

die zu T gehörende *Partition* von Q. Für eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ nennen wir

$$\underline{s}(f,T) = \sum_{P \in \mathcal{T}} \inf f(P)\ V(P)$$

die *Untersumme* von f *bzgl.* T und

$$\overline{s}(f,T) = \sum_{P \in \mathcal{T}} \sup f(P)\ V(P)$$

die *Obersumme* von f *bzgl.* T. Hierbei bezeichnet $V(P)$ das Volumen der Quader $P \in \mathcal{T}$. Eine Teilung $T' = (T_1', \dots, T_n')$ von Q heißt *feiner* als $T = (T_1, \dots, T_n)$, falls für jedes $\nu = 1, \dots, n$ die Teilung T_ν' von $[a_\nu, b_\nu]$ feiner ist als die Teilung T_ν. Zu je zwei Teilungen $T = (T_1, \dots, T_n)$, $T' = (T_1', \dots, T_n')$ von Q gibt es immer eine gemeinsame Verfeinerung T''. Es genügt für jedes $\nu = 1, \dots, n$ eine gemeinsame Verfeinerung T_ν'' von T_ν und T_ν'' zu wählen (siehe Bemerkung 16.2 in [EAI]) und $T'' = (T_1'', \dots, T_n'')$ zu setzen.

Lemma 10.1. *Seien T, T' Teilungen von Q und sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:*

(a) Ist T' feiner als T, so ist

$$\underline{s}(f,T) \le \underline{s}(f,T') \text{ und } \overline{s}(f,T') \le \overline{s}(f,T).$$

(b) $\underline{s}(f,T) \le \overline{s}(f,T')$.

Beweis. Seien $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ die zu T und T' gehörenden Partitionen von Q.

(a) Sei T' feiner als T. Für $P \in \mathcal{T}$ ist dann $V(P) = \sum_{\substack{R \in \mathcal{T}' \\ R \subset P}} V(R)$. Also gilt

$$\underline{s}(f,T) = \sum_{P \in \mathcal{T}} \inf f(P) V(P) \le \sum_{P \in \mathcal{T}} \sum_{\substack{R \in \mathcal{T}' \\ R \subset P}} \inf f(R) V(R) = \underline{s}(f,T').$$

Genauso folgt, dass $\overline{s}(f,T) \ge \overline{s}(f,T')$ ist.

(b) Sei T'' eine gemeinsame Verfeinerung von T und T'. Dann folgt mit (a)

$$\underline{s}(f,T) \le \underline{s}(f,T'') \le \overline{s}(f,T'') \le \overline{s}(f,T'). \qquad \square$$

Für eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ nennt man

$$\underline{\int}_{Q} f dx = \sup\{\underline{s}(f,T);\ T \text{ Teilung von } Q\}$$

das *Unterintegral* von f und

$$\overline{\int}_{Q} f dx = \inf\{\overline{s}(f,T);\ T \text{ Teilung von } Q\}$$

das *Oberintegral* von f.

Korollar 10.2. *Für $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt ist*

$$\underline{\int}_{Q} f dx \le \overline{\int}_{Q} f dx.$$

Beweis. Nach Lemma 10.1 (b) gilt

$$\underline{\int}_{Q} f dx \le \overline{s}(f,T)$$

für jede Teilung T von Q. Also ist auch das Infimum der rechten Seite noch größer gleich der linken Seite. $\square$

Sei T eine Teilung von Q und sei $\mathcal{T}$ die zugehörige Partition von Q. Eine *Zwischenfolge* von T ist eine Familie $Z = (z_P)_{P\in\mathcal{T}}$ von Punkten $z_p \in P$. Man nennt

$$S(f,T,Z) = \sum_{P\in\mathcal{T}} f(z_P)V(P)$$

die *Riemann-Summe* von f bezüglich (T,Z).

Definition 10.3. Eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, wenn eine Zahl $I \in \mathbb{R}$ existiert so, dass

$$I = \lim_{k\to\infty} S(f,T_k,Z_k)$$

ist für jede *Teilungen-Nullfolge* $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Q (das heißt, Folge von Teilungen T_k von Q mit $\lim_{k\to\infty}\omega(T_k) = 0$) und jede Wahl von Zwischenfolgen Z_k von T_k. In diesem Fall nennt man

$$\int_Q f dx = I$$

das *Riemann-Integral* von f über Q.

Bemerkung 10.4. (a) Für $n = 1$ stimmen die in Definition 10.3 definierte Riemann-Integrierbarkeit und das Riemann-Integral überein mit den in der Analysis I definierten Begriffen (Satz 16.11 in [EAI]).

(b) Nach Korollar 9.11 ist jede stetige Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und

$$\int\limits_Q f dx = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Wie für Funktionen einer Veränderlichen ist auch das mehrdimensionale Riemann-Integral linear und monoton.

Lemma 10.5. *(a) Die Menge*

$$RI(Q) = \{f;\ f : Q \to \mathbb{R} \text{ ist Riemann-integrierbar}\}$$

bildet einen Vektorraum bezüglich der punktweise definierten Addition und Skalarmultiplikation.

(b) Die Abbildung

$$RI(Q) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int\limits_Q f dx$$

ist $\mathbb{R}$-linear.

(c) Für $f, g \in RI(Q)$ mit $f \leq g$ auf Q gilt $\int\limits_Q f dx \leq \int\limits_Q g dx$.

Beweis. Sind $f, g \in RI(Q)$ und sind $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilungen-Nullfolge von Q und $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zwischenfolgen Z_k von T_k, so gilt

$$S(f + g, T_k, Z_k) = S(f, T_k, Z_k) + S(g, T_k, Z_k) \xrightarrow{k} \int\limits_Q f dx + \int\limits_Q g dx.$$

Also ist $f + g \in RI(Q)$ und $\int_Q (f + g) dx = \int_Q f dx + \int_Q g dx$. Genauso folgt, dass mit $f \in RI(Q)$ auch $\alpha f \in RI(Q)$ ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und dass $\int_Q \alpha f dx = \alpha \int_Q f dx$ ist. Sind $f, g \in RI(Q)$ mit $f \leq g$ und sind $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}},\ (T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie oben, so übertragen sich die Ungleichungen

$$S(f, T_k, Z_k) \leq S(g, T_k, Z_k) \quad (k \in \mathbb{N})$$

auf die Grenzwerte für $k \to \infty$. Also gilt die entsprechende Ungleichung zwischen den Riemann-Integralen von f und g. □

Bislang haben wir nur das Riemann-Integral von Funktionen über abgeschlossenen Quadern $Q \subset \mathbb{R}^n$ definiert. Als nächstes wollen wir die Klasse der zugelassenen Integrationsbereiche vergrößern.

Definition 10.6. Seien $A, N \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Mengen und sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

(a) Die Menge N heißt *dünn*, falls es für jedes $\epsilon > 0$ endlich viele abgeschlossene (oder äquivalent offene) Quader $Q_1, \ldots, Q_r \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$N \subset Q_1 \cup \ldots \cup Q_r \text{ und } \sum_{i=1}^{r} V(Q_i) < \epsilon.$$

Dabei ist das Volumen eines offenen Quaders $Q = \prod_{i=1}^n]a_i, b_i[$ ebenfalls definiert als

$$V(Q) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

(b) Die Menge A heißt *zulässig*, falls ihr Rand $\partial A \subset \mathbb{R}^n$ dünn ist.

(c) Die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt *zulässig*, falls die Menge

$$\{a \in A;\ f \text{ ist nicht stetig in } a\} \subset \mathbb{R}^n$$

dünn ist.

Bemerkung 10.7. Direkt aus der Definition dünner Mengen folgt:

(a) Ist $N \subset \mathbb{R}^n$ dünn, so ist auch $\overline{N} \subset \mathbb{R}^n$ dünn.

(b) Sind $N_1, \ldots, N_s$ dünne Mengen in $\mathbb{R}^n$, so ist auch $N_1 \cup \ldots \cup N_s$ dünn in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 10.8. *Seien $Q_0 \subset Q \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Quader und sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle Teilungen T von Q mit $\omega(T) < \delta$ gilt*

$$\sum_{\substack{P \in \mathcal{T} \\ P \cap Q_0 \neq \varnothing}} V(P) < V(Q_0) + \epsilon.$$

Beweis. Sei $Q_0 = \prod_{\nu=1}^n [c_\nu, d_\nu]$ und sei T eine Teilung von Q mit $\omega(T) < \delta$, wobei $\delta > 0$ zunächst beliebig sei. Seien $P_1, \ldots, P_r$ die Quader in der zu T gehörenden Partition $\mathcal{T}$ mit $P_i \cap Q_0 \neq \varnothing$. Dann gilt für alle $i = 1, \ldots, r$

$$P_i \subset \prod_{\nu=1}^{n} [c_\nu - \delta, d_\nu + \delta]$$

und $\{P_1, \ldots, P_r\}$ bilden eine Partition, die zu einer Teilung eines abgeschlossenen Quaders $Q_1 \supset Q_0$ gehört. Sei $Q_0(\delta) = \prod_{\nu=1}^n [c_\nu - \delta, d_\nu + \delta]$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{r} V(P_i) = V(Q_1) \leq V(Q_0(\delta)) = \prod_{\nu=1}^{n} (d_\nu - c_\nu + 2\delta),$$

und für genügend kleines $\delta > 0$ wird die rechte Seite kleiner als $V(Q_0) + \epsilon$. □

Unter einem abgeschlossenen *Würfel* im $\mathbb{R}^n$ versteht man einen abgeschlossenen Quader $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ mit gleich langen Kanten, das heißt mit

$$b_\nu - a_\nu = b_\mu - a_\mu \text{ für alle } \mu, \nu = 1, \ldots, n.$$

Korollar 10.9. *Ist $N \subset \mathbb{R}^n$ dünn, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele abgeschlossene Würfel $P_1, \ldots, P_s \subset \mathbb{R}^n$ mit*

$$N \subset P_1 \cup \ldots \cup P_s \text{ und } \sum_{i=1}^{s} V(P_i) < \epsilon.$$

Beweis. Wähle abgeschlossene Quader $Q_1, \ldots, Q_r \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$N \subset Q_1 \cup \ldots \cup Q_r \text{ und } \sum_{i=1}^{r} V(Q_i) < \epsilon$$

und dazu einen abgeschlossenen Würfel $Q \supset Q_1 \cup \ldots \cup Q_r$. Zu jeder vorgegebenen Zahl $\eta > 0$ gibt es nach Lemma 10.8 ein $\delta > 0$ so, dass für alle Teilungen $T = (T_1, \ldots, T_n)$ von Q mit $\omega(T) < \delta$ und für jedes $i = 1, \ldots, r$ gilt

$$\sum_{\substack{P \in \mathcal{T} \\ P \cap Q_i \neq \varnothing}} V(P) < V(Q_i) + \eta.$$

Indem man die Teilungen $T_1, \ldots, T_n$ äquidistant wählt mit $\omega(T_1) = \ldots = \omega(T_n)$, erreicht man, dass alle $P \in \mathcal{T}$ Würfel sind. Wegen

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{P \in \mathcal{T} \\ P \cap Q_i \neq \varnothing}} V(P) < \left(\sum_{i=1}^{r} V(Q_i) \right) + r\eta$$

genügt es, η klein genug zu wählen. □

Zulässige Funktionen auf abgeschlossenen Quadern sind Riemann-integrierbar.

Satz 10.10. *Ist $f : Q \to \mathbb{R}$ eine zulässige Funktion auf einem abgeschlossenen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$, so ist $f \in RI(Q)$ und*

$$\int_Q f dx = \underline{\int_Q} f dx = \overline{\int_Q} f dx.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir überlegen uns zunächst, dass es genügt, ein $\delta > 0$ zu finden so, dass $\overline{s}(f, T) - \underline{s}(f, T) < \epsilon$ ist für alle Teilungen T von Q mit $\omega(T) < \delta$. Denn dann folgt offensichtlich, dass

$$\overline{\int_Q} f dx = \underline{\int_Q} f dx,$$

und bezeichnet I den gemeinsamen Wert des Ober- und Unterintegrals von f, so gibt es zu jeder Teilungen-Nullfolge $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Q und beliebigen Zwischenfolgen Z_k von T_k einen Index k_0 so, dass

$$\begin{aligned} I - \epsilon &\leq \overline{s}(f, T_k) - \epsilon < \underline{s}(f, T_k) \leq S(f, T_k, Z_k) \\ &\leq \overline{s}(f, T_k) < \underline{s}(f, T_k) + \epsilon < I + \epsilon \end{aligned}$$

für alle $k \geq k_0$ ist. Es genügt k_0 zu $\delta > 0$ wie oben so zu wählen, dass $\omega(T_k) < \delta$ ist für alle $k \geq k_0$. Also gilt $\lim_{k \to \infty} S(f, T_k, Z_k) = I$ für alle Teilungen-Nullfolgen $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Q und Zwischenfolgen Z_k von T_k. Nach Definition 10.3 ist $\int_Q f dx = I$.

Sei also $\epsilon > 0$ beliebig. Da die Menge $A = \{a \in Q; f \text{ ist unstetig in } a\} \subset \mathbb{R}^n$ dünn ist, gibt es zu beliebig vorgegebenem $\eta > 0$ abgeschlossene Quader $Q_1, \ldots, Q_r \subset \mathbb{R}^n$ so, dass

$$A \subset \mathrm{Int}(Q_1) \cup \ldots \cup \mathrm{Int}(Q_r) \text{ und } \sum_{i=1}^{r} V(Q_i) < \eta.$$

Dann ist die Menge $K = Q \cap (\mathrm{Int}(Q_1) \cup \ldots \cup \mathrm{Int}(Q_r)^c$ nach Lemma 3.5 (a) kompakt und $f|_k$ ist nach Satz 3.13 gleichmäßig stetig. Also gibt es ein $\delta_1 > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \eta$ für alle $x, y \in K$ mit $\|x - y\|_\infty < \delta_1$. Nach Lemma 10.8 angewendet auf die Teilquader

$$Q_i \cap Q \subset Q \quad (i = 1, \ldots, r)$$

existiert ein $\delta \in (0, \delta_1)$ so, dass für alle Teilungen T von Q mit $\omega(T) < \delta$ gilt

$$\sum_{\substack{P \in \mathcal{T} \\ P \cap (Q_1 \cup \ldots \cup Q_r) \neq \varnothing}} V(P) \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{P \in \mathcal{T} \\ P \cap Q_i \neq \varnothing}} V(P) < \left(\sum_{i=1}^{r} V(Q_i) \right) + \eta < 2\eta.$$

Setze $M = Q_1 \cup \ldots \cup Q_r$. Dann gilt für jede Teilung T von Q mit $\omega(T) < \delta$

$$\overline{s}(f, T) - \underline{s}(f, T)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\substack{P \in \mathcal{T} \\ P \cap M \neq \varnothing}} (\sup f(P) - \inf f(P)) V(P) \quad + \sum_{\substack{P \in \mathcal{T} \\ P \cap M = \varnothing}} (\sup f(P) - \inf f(P)) V(P) \\ &\leq 2\|f\|_Q (2\eta) + \eta V(Q). \end{aligned}$$

Indem man η klein genug wählt, kann man die letzte Zahl kleiner als das vorgegebene ϵ machen. $\square$

Abändern von zulässigen Funktionen $f : Q \to \mathbb{R}$ auf dünnen Mengen ändert nichts an der Zulässigkeit oder dem Riemann-Integral. Zum Beweis benötigen wir, dass die Funktion, die jedem abgeschlossenen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ sein Volumen zuordnet, subadditiv ist.

Bemerkung 10.11. Sind $Q, Q_1, \ldots, Q_r \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Quader mit

$$Q \subset Q_1 \cup \ldots \cup Q_r,$$

so ist $V(Q) \leq V(Q_1) + \ldots + V(Q_r)$.

Beweis. Wie im zweiten Teil des Beweises von Satz 10.10 folgt als Anwendung von Lemma 10.8, dass zu jedem $\eta > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass für alle Teilungen T von Q mit Spurweite $\omega(T) < \delta$ gilt

$$V(Q) = \sum_{P \in \mathcal{T}} V(P) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{T} \\ P \cap (Q_1 \cup \ldots \cup Q_r) \neq \varnothing}} V(P) \quad < \quad \left(\sum_{i=1}^{r} V(Q_i) \right) + \eta.$$

Da dies für jedes $\eta > 0$ gilt, folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 10.12. *Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ zulässig. Ist $g : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und ist die Menge*

$$\{x \in Q;\; f(x) \neq g(x)\} \subset \mathbb{R}^n$$

dünn, so ist auch g zulässig und

$$\int_Q f dx = \int_Q g dx.$$

Beweis. Nach Bemerkung 10.7 sind die Mengen

$$N = \{x \in Q;\; f \text{ ist unstetig in } x\} \cup \{x \in Q;\; g(x) \neq f(x)\} \subset \mathbb{R}^n$$

und $\overline{N} \subset \mathbb{R}^n$ dünn. Ist $x \in Q \setminus \overline{N}$, so ist g stetig in x. Also ist g zulässig. Sei $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilungen-Nullfolge für Q. Da $\overline{N}$ dünn ist, gibt es nach Bemerkung 10.11 für jedes k eine Zwischenfolge Z_k von T_k bestehend aus Punkten in $Q \setminus \overline{N}$. Dann gilt

$$\int_Q g dx = \lim_{k\to\infty} S(g, T_k, Z_k) = \lim_{k\to\infty} S(f, T_k, Z_k) = \int_Q f dx.$$

Man beachte, dass die Riemann-Integrierbarkeit von f und g aus Satz 10.10 folgt. □

Unser nächtes Ziel ist es, das Riemann-Integral für zulässige Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ auf zulässigen Mengen zu definieren. Dazu zeigen wir zunächst, dass sich jede solche Funktion für jeden abgeschlossenen Quader $Q \supset A$ zu einer zulässigen Funktion auf Q fortsetzen lässt, indem man $f|_{Q\setminus A} \equiv 0$ setzt.

Lemma 10.13. *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine zulässige Funktion auf einer zulässigen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und sei $Q \supset A$ ein abgeschlossener Quader. Dann ist die Funktion $f_Q : Q \to \mathbb{R}$,*

$$f_Q(x) = f(x) \text{ für } x \in A,\; f_Q(x) = 0 \text{ für } x \in Q \setminus A$$

zulässig.

Beweis. Die Funktion f_Q ist stetig in jedem Punkt der Menge

$$\{x \in \mathrm{Int}(A);\; f \text{ ist stetig in } x\}$$

und in jedem Punkt $x \in Q \setminus \overline{A}$. Also ist die Menge $\{x \in Q;\; f_Q \text{ ist unstetig in } x\}$ der Unstetigkeitspunkte von f_Q enthalten in der dünnen Menge

$$\partial A \cup \{x \in A;\; f \text{ ist unstetig in } x\}.$$

Insbesondere ist diese Menge selber dünn. □

Nach Satz 10.10 sind alle in Lemma 10.13 gebildeten Fortsetzungen f_Q von f Riemann-integrierbar. Wir wollen zeigen, dass die Integrale der Funktionen f_Q nicht von der Wahl von Q abhängen.

Lemma 10.14. *Seien $Q_0 \subset Q$ abgeschlossene Quader und sei $f : Q_0 \to \mathbb{R}$ zulässig. Dann gilt*

$$\int\limits_Q f_Q dx = \int\limits_{Q_0} f dx.$$

Beweis. Nach Lemma 10.13 ist f_Q zulässig. Seien

$$Q_0 = \prod_{\nu=1}^n [c_\nu, d_\nu] \text{ und } Q = \prod_{\nu=1}^n [a_\nu, b_\nu].$$

Sei $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilungen-Nullfolge für Q und seien Z_k Zwischenfolgen von T_k so, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $\nu = 1, \ldots, n$

(i) die Punkte c_ν, d_ν in der Teilung, die die ν-te Komponente von T_k bildet, vorkommen und

(ii) $Z_k = \left(z_P^k\right)_{P\in\mathcal{T}_k}$ aus Punkten $z_P^k \in \operatorname{Int}(P)$ besteht.

Dann sind die Mengen

$$\mathcal{T}_k^0 = \{P \in \mathcal{T}_k;\ P \subset Q_0\} \quad (k \in \mathbb{N})$$

genau die Partitionen der von den T_k induzierten Teilungen T_k^0 von Q_0 und für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jeden Quader $P \in \mathcal{T}_k$ gilt

$$P \subset Q_0 \text{ oder } \operatorname{Int}(P) \cap Q_0 = \varnothing.$$

Indem wir Satz 10.10 sowohl auf f_Q als auch auf f anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int\limits_Q f_Q dx &= \lim_{k\to\infty} \sum_{P\in\mathcal{T}_k} f\left(z_P^k\right) V(P) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{\substack{P\in\mathcal{T}_k \\ P\subset Q_0}} f\left(z_P^k\right) V(P) = \int\limits_{Q_0} f dx.\end{aligned}$$ □

Ist $f : A \to \mathbb{R}$ eine zulässige Funktion auf einer zulässigen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und sind $Q_1, Q_2 \supset A$ abgeschlossene Quader, so ist der Durchschnitt

$$Q_0 = Q_1 \cap Q_2 \supset A$$

ein abgeschlossener Quader und es ist $f_{Q_i|_{Q_i\setminus Q_0}} \equiv 0$ für $i = 1, 2$. Nach Lemma 10.13 ist f_{Q_0} zulässig und mit Lemma 10.14 folgt

$$\int\limits_{Q_1} f_{Q_1} dx = \int\limits_{Q_1} (f_{Q_0})_{Q_1} dx = \int\limits_{Q_0} f_{Q_0} dx = \int\limits_{Q_2} f_{Q_2} dx.$$

Definition 10.15. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine zulässige Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine zulässige Funktion. Dann heißt die durch

$$\int\limits_A f dx = \int\limits_Q f_Q dx, \text{ falls } Q \supset A \text{ ein abgeschlossener Quader ist,}$$

definierte Zahl das *Riemann-Integral* von f über A. Wir definieren

$$Z(A) = \{g;\ g : A \to \mathbb{R} \text{ zulässig}\}.$$

Lemma 10.16. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ zulässig.*

(a) Die Menge $Z(A)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum bezüglich der punktweise definierten Addition und Skalarmultiplikation.

(b) Die Abbildung

$$Z(A) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int\limits_A f dx$$

ist $\mathbb{R}$-linear.

(c) Für $f, g \in Z(A)$ mit $f \leq g$ gilt $\int_A f dx \leq \int_A g dx$.

Beweis. Alle Aussagen folgen direkt aus den Definitionen mit Bemerkung 10.4 (a) und Lemma 10.5. $\square$

Wir beweisen eine Version des Satzes von Fubini für zulässige Funktionen auf Quadern.

Satz 10.17. *(Fubini) Seien $Q_1 \subset \mathbb{R}^m$, $Q_2 \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Quader und sei $f : Q_1 \times Q_2 \to \mathbb{R}$ zulässig so, dass für jedes $x \in Q_1$ die Funktion*

$$f(x, \cdot) : Q_2 \to \mathbb{R}$$

zulässig ist. Dann ist

$$g : Q_1 \to \mathbb{R},\ g(x) = \int\limits_{Q_2} f(x,y) dy$$

Riemann-integrierbar und

$$\int\limits_{Q_1 \times Q_2} f(x,y) d(x,y) = \int\limits_{Q_1} \left(\int\limits_{Q_2} f(x,y) dy \right) dx.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Der Beweis von Satz 10.10 zeigt, dass ein $\delta > 0$ existiert so, dass für alle Teilungen T von $Q_1 \times Q_2$ mit $\omega(T) < \delta$ gilt

$$\overline{s}(f,T) - \underline{s}(f,T) < \epsilon.$$

Sei T_1 eine Teilung von Q_1 mit $\omega(T_1) < \delta$. Wähle irgendeine Teilung T_2 von Q_2 mit $\omega(T_2) < \delta$. Dann ist $T = (T_1, T_2)$ eine Teilung von $Q_1 \times Q_2$ mit $\omega(T) < \delta$, und für $I = \int_{Q_1 \times Q_2} f d(x,y)$ gilt

$$\begin{aligned} I - \epsilon < \underline{s}(f,T) &= \sum_{P \in \mathcal{T}} \inf f(P) V(P) \\ &= \sum_{R \in \mathcal{T}_1} \sum_{S \in \mathcal{T}_2} \inf f(R \times S) V(R \times S) \\ &= \sum_{R \in \mathcal{T}_1} \sum_{S \in \mathcal{T}_2} \inf_{x \in R} \inf f(\{x\} \times S) V(R) V(S) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{R\in\mathcal{T}_1} \inf_{x\in R}\left(\sum_{S\in\mathcal{T}_2} \inf f(\{x\}\times S)V(S)\right)V(R)\\
&\leq \sum_{R\in\mathcal{T}_1}\left(\inf_{x\in R} g(x)\right)V(R) = \underline{s}(g,T_1)\\
&\leq \overline{s}(g,T_1)\leq \ldots \leq \overline{s}(f,T) < I+\epsilon.
\end{aligned}
$$

Wie im ersten Teil des Beweises von Satz 10.10 folgt hieraus, dass $g \in RI(Q_1)$ ist und dass

$$\int_{Q_1} g dx = \overline{\int_{Q_1}} g dx = \int_{-Q_1} g dx = I. \qquad \square$$

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt die Funktion $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\chi_A(x) = 1 \text{ für } x \in A,\ \chi_A(x) = 0 \text{ für } x \notin A$$

die *charakteristische Funktion* von A.

Definition 10.18. Für eine zulässige Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ nennt man die Zahl

$$V(A) = \int_A 1dx = \int_Q \chi_A dx, \text{ falls } Q \supset A \text{ ein abgeschlossener Quader ist,}$$

das *Volumen* von A.

Man beachte, dass in der Situation von Definition 10.18 die Funktion $\chi_{A_{|Q}}$ die triviale Forsetzung der Funktion $f \equiv 1 : A \to \mathbb{R}$ ist. Also ist $\chi_{A_{|Q}}$ nach Lemma 10.13 zulässig und nach Satz 10.10 Riemann-integrierbar.

Beispiel 10.19. Seien $A_1 \subset \mathbb{R}^m$, $A_2 \subset \mathbb{R}^n$ zulässige Mengen. Dann ist $A_1 \times A_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ zulässig und $V(A_1 \times A_2) = V(A_1)V(A_2)$. Zum Beweis überlege man sich zuerst, dass das kartesische Produkt aus einer dünnen Menge in $\mathbb{R}^k$ und einer beschränkten Menge in $\mathbb{R}^\ell$ eine dünne Menge in $\mathbb{R}^{k+\ell}$ ist. Da andererseits die Inklusion

$$\partial(A_1 \times A_2) \subset ((\partial A_1) \times \overline{A}_2) \cup (\overline{A}_1 \times \partial A_2)$$

gilt, ist $A_1 \times A_2$ zulässig. Sei $Q = Q_1 \times Q_2 \supset A_1 \times A_2$ ein abgeschlossener Quader. Dann folgt mit dem Satz von Fubini (Satz 10.17)

$$
\begin{aligned}
V(A_1\times A_2) &= \int_{Q_1\times Q_2} \chi_{A_1\times A_2}(x,y)d(x,y)\\
&= \int_{Q_1\times Q_2} \chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(y)d(x,y) = \int_{Q_1}\left(\int_{Q_2}\chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(y)dy\right)dx\\
&= \int_{Q_1}\left(\chi_{A_1}(x)\int_{Q_2}\chi_{A_2}(y)dy\right)dx = \int_{Q_1}\chi_{A_1}(x)dx\ V(A_2)\\
&= V(A_1)V(A_2).
\end{aligned}
$$

Man beachte dabei, dass die Funktion $\chi_{A_1 \times A_2}(x, \cdot) = \chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}$ für jedes feste $x \in Q_1$ zulässig als Funktion auf Q_2 ist.

Literatur

[EAI] Eschmeier, J., Analysis I, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2013.