

11 Die Transformationsformel

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz mit Konstante $L > 0$, falls für alle $x, y \in A$ gilt

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Lemma 11.1. *Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ dünn und $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz (mit Konstante $L > 0$), so ist $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ dünn.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Da $A \subset \mathbb{R}^n$ dünn ist, gibt es nach Korollar 10.9 abgeschlossene Würfel $Q_1, \dots, Q_r$ in $\mathbb{R}^n$ mit $A \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_r$ und

$$\sum_{j=1}^r V(Q_j) < \epsilon.$$

Sei r_j die Kantenlänge von Q_j für $j = 1, \dots, r$. Ist $x_j \in Q_j \cap A$, so gilt für alle Punkte $x \in Q_j \cap A$

$$\|f(x) - f(x_j)\|_\infty \leq \|f(x) - f(x_j)\| \leq L\|x - x_j\| \leq L\sqrt{n}\|x - x_j\|_\infty.$$

Also liegt $f(Q_j \cap A)$ in einem abgeschlossenen Würfel Q'_j mit Kantenlänge $2L\sqrt{n} r_j$. Dann ist aber

$$f(A) \subset \bigcup_{j=1}^r f(Q_j \cap A) \subset \bigcup_{j=1}^r Q'_j$$

$$\text{und } \sum_{j=1}^r V(Q'_j) = \sum_{j=1}^r (2L\sqrt{n})^n V(Q_j) < (2L\sqrt{n})^n \epsilon. \quad \square$$

Ist $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, so ist die Einschränkung von f auf jede kompakte Teilmenge $K \subset U$ Lipschitz mit einer geeigneten Konstanten $L > 0$. Denn gäbe es keine solche Konstante L , dann würde für jedes $j \in \mathbb{N}^*$ ein Paar $(x_j, y_j) \in K^2$ existieren mit

$$\|f(x_j) - f(y_j)\| > j\|x_j - y_j\|.$$

Wir dürfen annehmen, dass $x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j \in K$ existiert. Wenn dies nicht der Fall ist, wähle man mit Satz 3.8 eine konvergente Teilfolge $(x_{\ell_j}) \xrightarrow{j} x \in K$ und ersetze $(x_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ und $(y_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ durch die Folgen $(x_{\ell_j})_{j \in \mathbb{N}^*}$ und $(y_{\ell_j})_{j \in \mathbb{N}^*}$. Da die Funktion $\|f\|$ auf K beschränkt ist (Korollar 3.11), folgt dann auch $\lim_{j \rightarrow \infty} y_j = x$. Da U offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $\overline{B}_r(x) \subset U$. Mit der Mittelwertsatz (Korollar 6.17) erhält man, dass $f|_{B_r(x)}$ Lipschitz ist mit Konstante

$$L = \sup_{u \in \overline{B}_r(x)} \|J_f(u)\|.$$

Für genügend große j würde folgen, dass

$$j\|x_j - y_j\| < \|f(x_j) - f(y_j)\| \leq L\|x_j - y_j\|$$

wäre. Dieser Widerspruch zeigt, dass $f|_K$ Lipschitz ist.

Korollar 11.2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ dünn mit $\bar{A} \subset U$, so ist auch $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ dünn.

Beweis. Da $\bar{A}$ kompakt ist (siehe Definition 10.6), ist $f|_{\bar{A}}$ nach den Vorbemerkungen Lipschitz. Dann ist $f(A)$ nach Lemma 11.1 dünn. $\square$

Unter einer geeigneten Zusatzvoraussetzung an $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ kann man zeigen, dass Bilder von zulässigen Mengen A mit $\bar{A} \subset U$ unter f wieder zulässig sind.

Satz 11.3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ zulässig mit $\bar{A} \subset U$ und ist $f'(x)$ invertierbar für alle $x \in \text{Int}(A)$, so ist $\partial f(A) \subset f(\partial A)$ und $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ ist zulässig.

Beweis. Nach dem Satz über die lokale C^k -Invertierbarkeit (Satz 8.9) ist $f(\text{Int}(A)) \subset \mathbb{R}^n$ offen. Da $\bar{A}$ und damit auch $f(\bar{A})$ kompakt ist, folgt

$$\partial f(A) \subset \overline{f(A)} \subset f(\bar{A}) = f(\text{Int}(A)) \cup f(\partial A).$$

Wegen $f(\text{Int}(A)) \subset \text{Int} f(A)$ ist $\partial f(A) \subset f(\partial A)$. Nach Korollar 11.2 ist $f(\partial A)$ dünn. Also ist $\partial f(A)$ dünn und $f(A)$ zulässig. $\square$

Ist in der Situation von Satz 11.3 die Funktion $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ sogar C^1 -invertierbar als Funktion $f : U \rightarrow V$ zwischen offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$, so ist für jede zulässige Funktion $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ auch die Funktion $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ zulässig.

Satz 11.4. Sei $f : U \rightarrow V$ C^1 -invertierbar zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ zulässig mit $\bar{A} \subset U$ und ist $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ zulässig, so ist auch $g \circ f$ zulässig.

Beweis. Da die Menge $N = \{y \in f(A); g \text{ ist unstetig in } y\} \subset \mathbb{R}^n$ dünn ist mit

$$\bar{N} \subset \overline{f(A)} \subset f(\bar{A}) \subset V,$$

ist nach Korollar 11.2 angewendet auf $f^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ auch die Menge

$$f^{-1}(N) = (f^{-1})(N) \subset \mathbb{R}^n$$

dünn. Ist $x \in A \cap f^{-1}(N)^c$, so ist $f(x) \in A \cap N^c$ und daher ist g in $f(x)$ und $g \circ f$ in x stetig. Es folgt, dass die Menge $\{x \in A; g \circ f \text{ ist unstetig in } x\}$ als Teilmenge der dünnen Menge $f^{-1}(N)$ dünn ist. $\square$

Lineare Abbildungen bilden zulässige Mengen auf zulässige Mengen ab.

Lemma 11.5. Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear und sei $A \subset \mathbb{R}^n$ zulässig. Dann ist auch $TA \subset \mathbb{R}^n$ zulässig. Ist T nicht bijektiv, so ist TA sogar dünn.

Beweis. Ist T bijektiv, so ist $T'(x) = T$ invertierbar für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und TA ist zulässig nach Satz 11.3. Sei T nicht bijektiv, aber ohne Einschränkung der Allgemeinheit $T \neq 0$. Dann ist $V = \text{Im} T \subsetneq \mathbb{R}^n$ ein nicht-trivialer Teilraum und es gibt einen Isomorphismus $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $V = S(\mathbb{R}^m \times \{0\})$, $m = \dim V \in \{1, \dots, n-1\}$. Da

$$S^{-1}TA \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$$

beschränkt ist, gibt es eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^m$ mit $S^{-1}TA \subset B \times \{0\}$. Also ist $S^{-1}TA \subset \mathbb{R}^n$ dünn. Da S Lipschitz ist, folgt mit Lemma 11.1, dass auch $TA = S(S^{-1}TA)$ dünn ist. Insbesondere ist TA zulässig. $\square$

Bevor wir erste Versionen der Transformationsformel beweisen, benötigen wir noch eine Verbesserung von Bemerkung 10.11.

Lemma 11.6. *Seien $A, A_1, \dots, A_r \subset \mathbb{R}^n$ zulässig und sei $\epsilon > 0$.*

(a) *Ist $A \subset \bigcup_{i=1}^r A_i$, so ist $V(A) \leq \sum_{i=1}^r V(A_i)$.*

(b) *Es gibt abgeschlossene Quader $Q_1, \dots, Q_s$ mit $A \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_s$ und*

$$V/(A) \leq \sum_{j=1}^s V(Q_j) < V(A) + \epsilon.$$

(c) *Sind die Mengen $A_i \cap A_j$ ($i \neq j$) dünn, so gilt $V\left(\bigcup_{j=1}^r A_j\right) = \sum_{j=1}^r V(A_j)$.*

Beweis. Wähle einen abgeschlossenen Quader $Q \supseteq A \cup A_1 \cup \dots \cup A_r$.

(a) Mit der Definition des Volumens zulässiger Mengen (Definition 10.18) und den Eigenschaften des Riemann-Integrals aus Lemma 10.5 folgt, dass

$$V(A) = \int_Q \chi_A dx \leq \int_Q \sum_{j=1}^r \chi_{A_j} dx = \sum_{j=1}^r \int_Q \chi_{A_j} dx = \sum_{j=1}^r V(A_j).$$

(b) Sei $(T_k)_{k \geq 1}$ eine Teilungen-Nullfolge von Q und sei für jedes $k \geq 1$ eine Zwischenfolge $Z_k = (\xi_P^k)_{P \in \mathcal{T}_k}$ gewählt derart, dass $\xi_P^k \in A \cap P$ ist für alle $P \in \mathcal{T}_k$ mit $A \cap P \neq \emptyset$. Gemäß Definition 10.3 gilt

$$\begin{aligned} V(A) &= \int_Q \chi_A dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(\chi_A, T_k, Z_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{P \in \mathcal{T}_k} \chi_A(\xi_P^k) V(P) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\substack{P \in \mathcal{T}_k \\ P \cap A \neq \emptyset}} V(P). \end{aligned}$$

Mit Teil (a) und $A \subset \bigcup (P \in \mathcal{T}_k; P \cap A \neq \emptyset)$ folgt Teil (b).

(c) Sei zunächst $r = 2$ und seien $A_1, A_2, A \subset \mathbb{R}^n$ zulässig so, dass $A \subset A_1 \cup A_2$ und $A_1 \cap A_2$ dünn ist. Da

$$\chi_{A_1 \cup A_2} = \chi_{A_1} + \chi_{A_2}$$

auf $\mathbb{R}^n \setminus (A_1 \cap A_2)$ gilt, folgt mit Lemma 10.12, dass

$$V(A_1 \cup A_2) = \int_Q \chi_{A_1 \cup A_2} dx = \int_Q \chi_{A_1} dx + \int_Q \chi_{A_2} dx = V(A_1) + V(A_2).$$

Man beachte dabei, dass $A_1 \cup A_2$ wegen $\partial(A_1 \cup A_2) \subset \partial A_1 \cup \partial A_2$ eine zulässige Menge ist. Eine elementare Induktion zeigt, dass die Behauptung aus Teil (c) für alle $r \geq 2$ gilt. $\square$

Ist in der Situation von Lemma 11.6 (c) eine zulässige Funktion $f : \bigcup_{j=1}^r A_j \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so folgt ganz genauso, dass

$$\int_{\bigcup_{j=1}^r A_j} f dx = \sum_{j=1}^r \int_{A_j} f dx.$$

Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Zur Vorbereitung des Beweises der mehrdimensionalen Substitutionsregel wollen wir zunächst zeigen, dass für jede zulässige Menge $A \subset \mathbb{R}^n$

$$V(TA) = |\det T| V(A)$$

ist. Zum Beweis dürfen wir nach Lemma 11.5 annehmen, dass T bijektiv ist. Sei also $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorraumisomorphismus. Um die obige Formel für T und alle zulässigen Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ zu zeigen, genügt es zu prüfen, dass

$$V(TQ) \leq |\det T| V(Q) \text{ und } V(T^{-1}Q) \leq |\det(T^{-1})| V(Q)$$

für alle abgeschlossenen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ gilt. Denn ist dies gezeigt und ist $A \subset \mathbb{R}^n$ zulässig, so gibt es nach Lemma 11.6 (b) zu jedem $\epsilon > 0$ abgeschlossene Quader $Q_1, \dots, Q_r \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_r$ und $\sum_{j=1}^r V(Q_j) < V(A) + \epsilon$. Mit Lemma 11.6 (a) folgt

$$V(TA) \leq \sum_{i=1}^r V(TQ_i) \leq |\det(T)| \sum_{i=1}^r V(Q_i) < |\det(T)| (V(A) + \epsilon).$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir die Ungleichung

$$V(TA) \leq |\det(T)| V(A).$$

Dasselbe Argument angewendet auf T^{-1} statt T und TA statt A zeigt, dass

$$V(A) = V(T^{-1}(TA)) \leq |\det(T^{-1})| V(TA) = \frac{V(TA)}{|\det(T)|}$$

und damit auch $|\det T| V(A) \leq V(TA)$ gilt.

Satz 11.7. Für jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und jede zulässige Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$V(TA) = |\det T| V(A).$$

Beweis. Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorraumisomorphismus. In der Linearen Algebra zeigt man, dass sich T darstellen lässt als endliche Komposition

$$T = T_1 \circ \dots \circ T_r$$

von Isomorphismen $T_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der folgenden Formen

- (i) $T_k(x_1, \dots, x_n) = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$ mit einer Permutation $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$,
- (ii) $T_k(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, cx_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- (iii) $T_k(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n \pm x_i)$ mit einem festen Index $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Ist T_k vom Typ (i), (ii) oder (iii), so ist T_k^{-1} vom selben Typ. Ist die in Satz 11.7 behauptete Formel für Isomorphismen der obigen drei Formen gezeigt, so folgt mit Lemma 11.5, dass

$$\begin{aligned} V(TA) &= V(T_1(T_2 \circ \dots \circ T_r A)) = |\det T_1| V(T_2 \circ \dots \circ T_r A) \\ &= |\det T_1| \cdots |\det T_r| V(A) = |\det T| V(A). \end{aligned}$$

Nach den Bemerkungen, die Satz 11.7 vorausgehen genügt es also, anzunehmen, dass T von einer dieser drei Formen ist, und für jeden der drei Fälle zu zeigen, dass

$$V(TQ) = |\det T| V(Q)$$

für alle abgeschlossenen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ gilt. Für Isomorphismen T vom Typ (i) oder (ii) gilt dies offensichtlich. Sei also $i \in \{1, \dots, n-1\}$ und $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus der Form

$$T(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n \pm x_i).$$

Dann ist $\det T = 1$. Ist $R > 0$ so groß, dass $[a_n, b_n] \pm [a_i, b_i] \subset [-R, R]$ und bezeichnet Q' den abgeschlossenen Quader

$$Q' = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}],$$

so ist

$$V(TQ) = \int_{Q' \times [-R, R]} \chi_{TQ}(x', x_n) d(x', x_n).$$

Da für jedes $x' \in Q'$ die Funktion $\chi_{TQ}(x', \cdot) : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ wirkt wie die charakteristische Funktion des Intervalls $[a_n, b_n] \pm x_i$ und damit insbesondere zulässig ist, folgt mit dem Satz von Fubini (Satz 10.17), dass

$$\begin{aligned} V(TQ) &= \int_{Q'} \left(\int_{[-R, R]} \chi_{[a_n, b_n] \pm x_i}(x_n) dx_n \right) dx' \\ &= \int_{Q'} (b_n - a_n) dx' \\ &= (b_n - a_n) V(Q') = V(Q) = |\det T| V(Q) \end{aligned}$$

gilt. Damit ist Satz 11.7 vollständig bewiesen. $\square$

Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} Q_r(a) &= \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\|_\infty < r\}, \\ \overline{Q}_r(a) &= \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\|_\infty \leq r\} \end{aligned}$$

den offenen und abgeschlossenen Würfel um a mit Kantenlänge $2r$.

Lemma 11.8. *Sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Ist $\overline{Q}_r(a) \subset U$ ein abgeschlossener Würfel und ist $\epsilon > 0$ so, dass $J_f(a) = I_n$ die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix ist und*

$$\|J_f(x) - I_n\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$$

für alle $x \in \overline{Q}_r(a)$ gilt, so ist

$$\overline{Q}_{(1-\epsilon)r}(f(a)) \subset f(\overline{Q}_r(a)) \subset \overline{Q}_{(1+\epsilon)r}(f(a)).$$

Beweis. Wir dürfen ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $a = f(a) = 0$ ist. Sonst ersetze man f durch die Funktion

$$\tilde{f} : U - a \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \tilde{f}(x) = f(x + a) - f(a).$$

Sei also $a = f(a) = 0$. Ist $y \in \overline{Q}_{(1-\epsilon)r}(0)$, so definiert

$$h : \overline{Q}_r(0) \rightarrow \overline{Q}_r(0), \quad h(x) = y - f(x) + x$$

eine ϵ -Kontraktion bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Denn für $u, v \in \overline{Q}_r(0)$ erhält man mit der Mittelwertabschätzung (Korollar 6.17), dass

$$\|h(u) - h(v)\| \leq \sup_{x \in \overline{Q}_r(0)} \|J_h(x)\| \|u - v\| \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \|u - v\|$$

und damit $\|h(u) - h(v)\|_\infty \leq \epsilon \|u - v\|_\infty$ gilt. Insbesondere ist

$$\|h(u)\|_\infty \leq \|y\|_\infty + \|h(u) - h(0)\|_\infty \leq (1 - \epsilon)r + \epsilon r = r$$

für alle $u \in \overline{Q}_r(0)$. Der Banachsche Fixpunktsatz (Satz 8.4) zeigt, dass es genau ein $x \in \overline{Q}_r(0)$ gibt mit $h(x) = x$ oder äquivalent mit $y = f(x)$.

Für $x \in \overline{Q}_r(0)$ folgt ebenfalls mit der Mittelwertabschätzung, dass

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_\infty &\leq \|x\|_\infty + \|(f - \text{id})(x) - (f - \text{id})(0)\|_\infty \\ &\leq \|x\|_\infty + \sup_{y \in \overline{Q}_r(0)} \|J_f(y) - I_n\| \|x\| \\ &\leq \|x\|_\infty + \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \|x\| \leq (1 + \epsilon) \|x\|_\infty \leq (1 + \epsilon)r. \end{aligned}$$

Damit ist auch die zweite Inklusion bewiesen. $\square$

Nach Satz 11.3 bilden C^1 -invertierbare Abbildungen $f : U \rightarrow V$ zwischen offenen Mengen zulässige Mengen $A \subset U$, für die auch $\overline{A} \subset U$ ist, auf zulässige Mengen $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ ab. Wir beweisen eine Formel für das Volumen von Bildern $f(R)$ kompakter Würfel $R \subset U$.

Satz 11.9. *Sei $f : U \rightarrow V$ eine C^1 -invertierbare Abbildung zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für jeden kompakten Würfel $R \subset U$*

$$V(f(R)) = \int_R |\det J_f(x)| dx.$$

Beweis. Sei $N \in \mathbb{N}^*$ und sei $T = T_N$ die Teilung von R , die entsteht, indem man die Kanten von R in N gleich lange Teilintervalle zerlegt. Für $Q, Q' \in \mathcal{T}$ mit $Q \neq Q'$ ist $Q \cap Q'$ eine (möglichweise leere) dünne kompakte Menge und nach Korollar 11.2 ist dann auch $f(Q) \cap f(Q') = f(Q \cap Q') \subset \mathbb{R}^n$ dünn. Mit Lemma 11.6 (c) folgt, dass

$$V(f(R)) = \sum_{Q \in \mathcal{T}} V(f(Q)).$$

Da die Abbildung $U \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|J_f(x)^{-1}\|$ stetig ist (siehe Bemerkung 8.6 und Beispiel 2.13 (b)), ist

$$C = \sup_{x \in R} \|J_f(x)^{-1}\| < \infty.$$

Sei $\epsilon \in (0, 1)$ beliebig. Da $R \rightarrow M(n \times n, \mathbb{R})$, $x \mapsto J_f(x)$ als stetige Funktion auf dem Kompaktum R gleichmäßig stetig ist (Satz 3.13), gilt für genügend großes n , dass für alle $Q \in \mathcal{T}$ und $x, y \in Q$

$$\|J_f(x) - J_f(y)\| < \frac{\epsilon}{C\sqrt{n}}$$

ist. Wir fixieren ein solches N . Für $Q \in \mathcal{T}$ sei $a_Q \in Q$ der Mittelpunkt des Würfels Q und $T_Q = f'(a_Q)$. Dann ist $T_Q^{-1}f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Funktion und mit der Kettenregel (Bemerkung nach Satz 6.8) folgt, dass für alle $Q \in \mathcal{T}$

$$J_{T_Q^{-1}f}(a_Q) = J_f(a_Q)^{-1} J_f(a_Q) = I_n$$

gilt. Nach Wahl von N gilt für $Q \in \mathcal{T}$ und $x \in Q$

$$\|J_{T_Q^{-1}f}(x) - I_n\| \leq \|J_f(a_Q)^{-1}\| \|J_f(x) - J_f(a_Q)\| \leq C \frac{\epsilon}{C\sqrt{n}} = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.$$

Bezeichnet $r = r_N$ die Hälfte der Kantenlänge der Würfel aus $\mathcal{T} = \mathcal{T}_N$, so folgt mit Lemma 11.8 und den Bezeichnungen aus Lemma 11.8 für jeden Würfel $Q = \overline{Q}_r(a_Q) \in \mathcal{T}$, dass

$$\overline{Q}_{(1-\epsilon)r}(T_Q^{-1}f(a_Q)) \subset T_Q^{-1}f(Q) \subset \overline{Q}_{(1+\epsilon)r}(T_Q^{-1}f(a_Q)).$$

Indem man die lineare Abbildung T_Q anwendet und Satz 11.7 benutzt, erhält man die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |\det(T_Q)|(1-\epsilon)^n V(Q) &= V(T_Q \overline{Q}_{(1-\epsilon)r}(T_Q^{-1}f(a_Q))) \\ &\leq V(f(Q)) \leq V(T_Q \overline{Q}_{(1+\epsilon)r}(T_Q^{-1}f(a_Q))) \\ &= |\det(T_Q)|(1+\epsilon)^n V(Q). \end{aligned}$$

Aufsummieren über alle $Q \in \mathcal{T}$ ergibt die Ungleichungen

$$\begin{aligned} (1-\epsilon)^n \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} |\det J_f(a_Q)| V(Q) &\leq \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} V(f(Q)) \\ &= V(f(R)) \leq (1+\epsilon)^n \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} |\det J_f(a_Q)| V(Q). \end{aligned}$$

Da stetige Funktionen auf R Riemann-integrierbar sind (Bemerkung 10.4), gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{Q \in \mathcal{T}_N} |\det J_f(a_Q)| V(Q) = \int_R |\det J_f(x)| dx.$$

Geht man in der obigen Ungleichungskette zu den Grenzwerten für $N \rightarrow \infty$ über, so sieht man, dass

$$(1-\epsilon)^n \int_R |\det J_f(x)| dx \leq f(R) \leq (1+\epsilon)^n \int_R |\det J_f(x)| dx$$

für alle $\epsilon > 0$ gilt. Also gilt die Behauptung. □

Wir formulieren eine erste Version der mehrdimensionalen Substitutionsregel.

Korollar 11.10. *Sei $f : U \rightarrow V$ C^1 -invertierbar zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ und sei $R \subset U$ ein abgeschlossener Würfel. Ist $g : f(R) \rightarrow \mathbb{R}$ zulässig, so gilt*

$$\int_{f(R)} g dx = \int_R g \circ f |\det J_f| dx,$$

wobei der Integrand rechts eine zulässige Funktion auf R definiert.

Beweis. Nach Lemma 11.3 ist $f(R) \subset \mathbb{R}^n$ zulässig und nach Satz 11.4 definiert der Integrand im rechts stehenden Integral eine zulässige Funktion auf R . Sei T eine Teilung von R bestehend aus äquidistanten Teilungen der Kanten gleicher Spurweite. Mit Satz 11.9 und der Monotonie des Riemann-Integrals (Lemma 10.16) folgt für alle $P \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} \int_P \inf(g \circ f(P)) |\det J_f| dx &= \inf(g \circ f)(P) V(f(P)) \\ &= \int_{f(P)} \inf(g \circ f)(P) dx \leq \int_{f(P)} g dx \\ &\leq \int_{f(P)} \sup(g \circ f)(P) dx \\ &= \int_P \sup(g \circ f)(P) |\det J_f| dx. \end{aligned}$$

Wie im Beweis des letzten Satzes folgt mit Korollar 11.2, dass die Mengen $f(P) \cap f(P') = f(P \cap P') \subset \mathbb{R}^n$ dünn sind für alle $P, P' \in \mathcal{T}$ mit $P \neq P'$. Nach der Bemerkung im Anschluss an Lemma 11.6 gilt

$$\sum_{P \in \mathcal{T}} \int_{f(P)} g dx = \int_{f(R)} g dx$$

und

$$\sum_{P \in \mathcal{T}} \int_P g \circ f |\det J_f| dx = \int_R g \circ f |\det J_f| dx.$$

Die beiden rechts stehenden Integrale liegen beide zwischen

$$\sum_{P \in \mathcal{T}} \int_P \inf(g \circ f(P)) |\det J_f| dx \quad \text{und} \quad \sum_{P \in \mathcal{T}} \int_P \sup(g \circ f(P)) |\det J_f| dx.$$

Da

$$\begin{aligned} \sum_{P \in \mathcal{T}} \int_P (\sup g \circ f(P) - \inf g \circ f(P)) |\det J_f| dx \\ \leq \sup_{x \in R} |\det J_f(x)| (\overline{S}(g \circ f, T) - \underline{S}(g \circ f, T)) \end{aligned}$$

gilt und da nach dem Beweis von Satz 10.10 die Differenz $\overline{S}(g \circ f, T) - \underline{S}(g \circ f, T)$ gegen 0 strebt für $\omega(T) \rightarrow 0$, folgt die Behauptung. $\square$

Im Beweis der allgemeinen Version der Transformationsformel benötigen wir, dass auch für das Riemann-Integral zulässiger Funktionen über zulässigen Mengen die Standardabschätzung gilt.

Lemma 11.11. *Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine zulässige Funktion über einer zulässigen Menge. Dann gilt*

$$\left| \int_A f dx \right| \leq \int_A |f| dx \leq \|f\|_A V(A).$$

Beweis. Da die Betragsfunktion $|\cdot|$ stetig ist, ist mit f auch $|f|$ zulässig auf A . Seien $Q \supset A$ ein abgeschlossener Quader, $(T_k)_{k \geq 1}$ eine Teilungen-Nullfolge von Q und Z_k Zwischenfolgen von T_k für $k \geq 1$. Dann folgt die behauptete Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_A f dx \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} |S(f_Q, T_k, Z_k)| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} S(|f|_Q, T_k, Z_k) \\ &= \int_A |f| dx \leq \|f\|_A \lim_{k \rightarrow \infty} S(\chi_A, T_k, Z_k) = \|f\|_A V(A) \end{aligned}$$

direkt aus der Definition des Riemann-Integrals. $\square$

Da für beliebige Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B, \quad \partial(A \cap B) \subset \partial A \cap \partial B,$$

sind endliche Vereinigungen und Durchschnitte zulässiger Mengen wieder zulässig. Wir nennen eine Teilung T eines abgeschlossenen Würfels $Q \subset \mathbb{R}^n$ äquivalent, wenn sie aus äquidistanten Teilungen der Kanten besteht, die alle gleiche Spurweite besitzen.

Satz 11.12. (*Transformationsformel*) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ zulässig mit $\bar{A} \subset U$ so, dass

$$f : \text{Int}(A) \rightarrow V$$

C^1 -invertierbar auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ ist. Ist $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ zulässig, so ist auch $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ zulässig und

$$\int_{f(A)} g dx = \int_A g \circ f |\det J_f| dx.$$

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $\text{Int}(A) \neq \emptyset$ ist, denn wegen $\bar{A} = \text{Int}(A) \cup \partial A$ sind sonst A und nach Korollar 11.2 auch $f(A)$ dünne Mengen und beide Integrale sind Null.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir fixieren einen abgeschlossenen Würfel $Q \supset A$. Da $\partial A \subset Q$ dünn ist, folgt wie im Beweis von Satz 10.10, dass eine äquidistante Teilung T von Q existiert mit

$$\sum_{\substack{P \in \mathcal{T} \\ P \cap \partial A \neq \emptyset}} V(P) < \epsilon.$$

Nach den Vorbemerkungen zu Korollar 11.2 ist $f|_{\bar{A}} : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz mit einer geeigneten Konstanten $L > 0$. Seien $P_1, \dots, P_r$ die Würfel $P \in \mathcal{T}$ mit $P \cap \partial A \neq \emptyset$ und seien $Q_1, \dots, Q_s$ die Würfel $Q \in \mathcal{T}$ mit $Q \subset \text{Int}(A)$. Dann sind

$$B = \bigcup_{i=1}^r P_i \cap A \quad \text{und} \quad C = \bigcup_{i=1}^s Q_i$$

zulässige Mengen, $C \subset \text{Int}(A)$ ist kompakt und $B \cap C \subset \bigcup_{P \in \mathcal{T}} \partial P$ ist eine dünne Menge. Eine einfache Überlegung zeigt, dass

$$A = B \cup C.$$

Ist nämlich $x \in A$ ein Punkt, der in einem Würfel $P \in \mathcal{T}$ mit $P \cap \partial A = \emptyset$ liegt, so ist $P \subset \text{Int}(A)$. Denn würde P einen Punkt $y \notin \text{Int}(A)$ enthalten, so wäre $y \notin \bar{A}$ und für

$$t_0 = \sup\{t \in [0, 1]; x + t(y - x) \in \bar{A}\} \in [0, 1[$$

würde folgen, dass $x + t_0(y - x) \in P \cap \partial A$ wäre.

Im nächsten Schritt zeigen wir, dass $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ zulässig ist. Man beachte zunächst, dass $\tilde{g} : f(\bar{A}) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\tilde{g}(x) = g(x) \text{ für } x \in f(A); \tilde{g}(x) = 0 \text{ sonst}$$

nach Lemma 10.13 eine zulässige Funktion ist. Also ist die durch

$$K = \overline{\{y \in f(\bar{A}); \tilde{g} \text{ ist unstetig in } x\}} \subset \mathbb{R}^n$$

definierte Menge dünn und kompakt. Nach Voraussetzung ist die von f induzierte Abbildung

$$f_0 : \text{Int}(A) \rightarrow V, x \mapsto f(x)$$

C^1 -invertierbar. Da $f(C) \cap K \subset V$ dünn und kompakt ist, ist die Menge

$$\overset{-1}{f}(K) \cap C = f_0^{-1}(f(C) \cap K) \subset \text{Int}(A)$$

nach Korollar 11.2 dünn und kompakt. Da B nach Konstruktion durch endlich viele abgeschlossene Quader mit Volumensumme kleiner ϵ überdeckt wird, kann

$$\overset{-1}{f}(K) \cap A = (\overset{-1}{f}(K) \cap B) \cup (\overset{-1}{f}(K) \cap C)$$

durch endlich viele abgeschlossene Quader mit Volumensumme kleiner 2ϵ überdeckt werden. Da ϵ beliebig klein gewählt werden kann, ist damit gezeigt, dass $\overset{-1}{f}(K) \cap A \subset \mathbb{R}^n$ eine dünne Menge ist.

Sei $x \in A \cap \overset{-1}{f}(K)^c$. Dann ist $f(x) \in f(A) \cap K^c$ und daher ist $\tilde{g}$ stetig in $f(x)$. Dann ist auch g stetig in $f(x)$. Insgesamt folgt, dass die Menge der Unstetigkeitspunkte von $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ enthalten ist in der dünnen Menge $\overset{-1}{f}(K) \cap A$.

Die Mengen $f(A)$, $f(B)$ und $f(C)$ sind zulässig nach Satz 11.3. Die Mengen ∂A und $B \cap C$ sind dünn. Der Durchschnitt von $f(B)$ und $f(C)$ ist wegen

$$f(B) \cap f(C) \subset f(\partial A) \cup f(B \cap C)$$

nach Korollar 11.2 dünn. Für $i, j \in \{1, \dots, s\}$ mit $i \neq j$ sind die Mengen $Q_i \cap Q_j$ dünn und nach Korollar 11.2 sind auch die Durchschnitte

$$f(Q_i) \cap f(Q_j) = f(Q_i \cap Q_j)$$

dünn. Die Bemerkungen im Anschluss an Lemma 11.6 und Satz 11.10 zeigen, dass

$$\begin{aligned}
\int_{f(A)} g dx &= \int_{f(B)} g dx + \int_{f(C)} g dx = \int_{f(B)} g dx + \sum_{j=1}^s \int_{f(Q_j)} g dx \\
&= \int_{f(B)} g dx + \sum_{j=1}^s \int_{Q_j} g \circ f |\det J_f| dx \\
&= \int_{f(B)} g dx + \int_C g \circ f |\det J_f| dx \\
&= \int_A g \circ f |\det J_f| dx - \int_B g \circ f |\det J_f| dx + \int_{f(B)} g dx.
\end{aligned}$$

Da $f|_A$ Lipschitz mit Konstante L ist, folgt wie im Beweis von Lemma 11.1, dass

$$V(f(P_i \cap A)) \leq (2\sqrt{n}L)^n V(P_i)$$

ist für alle $i = 1, \dots, r$. Als Anwendung von Lemma 11.6 (a) erhält man, dass

$$V(f(B)) \leq \sum_{i=1}^r V(f(P_i \cap A)) \leq (2\sqrt{n}L)^n \sum_{i=1}^r V(P_i) < (2\sqrt{n}L)^n \epsilon.$$

Mit Lemma 11.11 erhält man, dass sich die beiden Seiten der behaupteten Transformationsformel höchstens um

$$\begin{aligned}
\left| \int_B g \circ f |\det J_f| dx \right| + \left| \int_{f(B)} g dx \right| &\leq \|g \circ f |\det J_f|\|_A V(B) + \|g\|_{f(A)} V(f(B)) \\
&\leq \|g \circ f |\det J_f|\|_A \epsilon + \|g\|_{f(A)} (2\sqrt{n}L)^n \epsilon
\end{aligned}$$

unterscheiden. Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 11.13. (Polarkoordinaten) Sei $R > 0$ und $K = K_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| \leq R\}$ die abgeschlossene Kreisscheibe mit Radius R um 0. Dann ist $K \subset \mathbb{R}^2$ zulässig und für jede stetige Funktion $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_K g(x) dx = \int_0^R r \left(\int_0^{2\pi} g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi \right) dr.$$

Beweis. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ ist stetig partiell differenzierbar mit $\det J_f(r, \varphi) = r$ für alle $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. Die kompakte Menge $A = [0, R] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$ ist zulässig und die von f induzierte Abbildung

$$f : \text{Int}(A) =]0, R[\times]0, 2\pi[\rightarrow \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| < R\} \setminus ([0, R] \times \{0\})$$

ist C^1 -invertierbar (siehe Beispiel 8.11). Mit der Transformationsformel (Satz 11.12) und dem Satz von Fubini (Satz 9.13) erhält man

$$\begin{aligned}\int_K g dx &= \int_{f(A)} g dx = \int_A g \circ f |\det J_f| d(r, \varphi) \\ &= \int_A g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) \\ &= \int_0^R r \left(\int_0^{2\pi} g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi \right) dr.\end{aligned}$$

Die Zulässigkeit von $K = f(A)$ wurde bereits in Satz 11.3 bewiesen. □

Als Anwendung der Polarkoordinatenformel aus Korollar 11.13 berechnen wir ein uneigentliches 1-dimensionales Riemann-Integral.

Beispiel 11.14. Nach Korollar 11.13 gilt

$$\begin{aligned}\int_{K_R(0)} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R e^{-r^2} r dr \right) d\varphi = 2\pi \int_0^R e^{-r^2} r dr \\ &= -\pi e^{-r^2} \Big|_0^R = \pi(1 - e^{-R^2}) \xrightarrow{(R \rightarrow \infty)} \pi.\end{aligned}$$

Mit $K_{R, \sqrt{2}R} = K_{\sqrt{2}R}(0) \setminus K_R(0)$ folgt

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_{[-R, R]^2 \setminus K_R(0)} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \leq \int_{K_{R, \sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \\ &= \int_{K_{\sqrt{2}R}(0)} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) - \int_{K_R(0)} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \xrightarrow{(R \rightarrow \infty)} 0.\end{aligned}$$

Also gilt auch

$$\begin{aligned}\pi &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, R]^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \left(\int_{-R}^R e^{-(x^2+y^2)} dy \right) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2.\end{aligned}$$

Dabei haben wir noch einmal den Satz von Fubini benutzt. Also gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Man beachte dabei auch, dass die Existenz dieses uneigentlichen Integrals eine einfache Konsequenz des Majorantenkriteriums für uneigentliche Riemann-Integrale (Bemerkung 18.7 (b) in [EAI]) und der Konvergenz des uneigentlichen Riemann-Integrals $\int_1^\infty x^{-2} dx$ folgt.

Literatur

[EAI] Eschmeier, J., Analysis I, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2013.