

2 Grenzwerte und Stetigkeit

Wir benutzen die Bezeichnungen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ für die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ für die Menge der positiven ganzen Zahlen.

Definition 2.1. (Konvergenz). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X und $x \in X$ beliebig. Man sagt, dass $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen x *konvergiert* und schreibt dafür $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$, falls für jede Umgebung U von x ein Index $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_k \in U$ für alle $k \geq k_0$.

Nach Definition des Umgebungsbegriffs bedeutet $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ genau, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(x_k, x) < \epsilon$ für alle $k \geq k_0$.

Bemerkung.

Äquivalente Metriken (siehe Definition 1.13) liefern dieselben konvergenten Folgen.

Lemma 2.2. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ und sei $a \in \mathbb{R}^n$ mit

$$x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \text{und} \quad a = (a_1, \dots, a_n).$$

Dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ in $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k\nu} = a_\nu$ in $\mathbb{R}$ ist für jedes $\nu = 1, \dots, n$.

Beweis. Sei $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ in $\mathbb{R}^n$ und sei $\nu \in \{1, \dots, n\}$. Dann gibt es zu gegebenen $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|x_k - a\| < \epsilon$ für alle $k \geq k_0$. Nach Definition der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ gilt dann auch $|x_{k\nu} - a_\nu| \leq \|x_k - a\| < \epsilon$ für alle $k \geq k_0$.

Sei umgekehrt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k\nu} = a_\nu$ in $\mathbb{R}$ für $\nu = 1, \dots, n$ und sei $\epsilon > 0$. Dann existiert für jedes $\nu = 1, \dots, n$ ein $k_\nu \in \mathbb{N}$ mit $|x_{k\nu} - a_\nu| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ für alle $k \geq k_\nu$. Für $k \geq \max\{k_1, \dots, k_n\}$ folgt, dass $\|x_k - a\| = \left(\sum_{\nu=1}^n |x_{k\nu} - a_\nu|^2\right)^{1/2} < \epsilon$. $\square$

Genauso sieht man, dass eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}^n$ gegen ein $a \in \mathbb{C}^n$ konvergiert, wenn sie komponentenweise gegen a konvergiert.

Satz 2.3. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $M \subset X$ eine Teilmenge. Dann ist

$$\overline{M} = \{x \in X; \text{ es gibt eine Folge } (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ in } M \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x\}.$$

Beweis. Ist $x \in \overline{M}$, so gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}^*$ ein $x_k \in B_{\frac{1}{k}}(x) \cap M$. Dann ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ eine Folge in M mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$. Sei umgekehrt $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ und sei U eine Umgebung von x . Nach Definition der Konvergenz gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in U$ für alle $k \geq k_0$. Insbesondere ist $U \cap M \neq \emptyset$. $\square$

Definition 2.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum

- (a) Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(x_k, x_\ell) < \epsilon$ für alle $k, \ell \geq k_0$.

- (b) Der metrische Raum (X, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge in (X, d) konvergiert.
- (c) Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt *vollständig* (oder *Banachraum*), falls V mit der induzierten Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ vollständig ist.

Satz 2.5. *Die normierten Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind vollständig.*

Beweis. Sei K der Körper der reellen oder komplexen Zahlen und sei $(x_k)_{k \geq 0}$ eine Cauchy-Folge in K^n mit

$$x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \quad (k \geq 0).$$

Da für $\nu = 1, \dots, n$ und $k, \ell \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $|x_{k\nu} - x_{\ell\nu}| \leq \|x_k - x_\ell\|$ gilt, sind die Folgen $(x_{k\nu})_{k \geq 0}$ ($\nu = 1, \dots, n$) Cauchy-Folgen in K . Da K vollständig ist, existieren die Limiten

$$a_\nu = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k\nu} \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

in K . Aus Lemma 2.2 folgt, dass die Folge $(x_k)_{k \geq 0}$ in K^n gegen $(a_1, \dots, a_n)$ konvergiert. $\square$

In metrischen Räumen gilt eine Verallgemeinerung des Intervallschachtelungsprinzips.

Satz 2.6. (*Schachtelungsprinzip*). *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $(A_k)_{k \geq 0}$ eine Folge abgeschlossener Mengen in X mit*

$$\emptyset \neq A_{k+1} \subset A_k$$

für alle $k \geq 0$ und so, dass die Folge der durch

$$\text{diam}(A_k) = \sup\{d(x, y); x, y \in A_k\}$$

definierten Durchmesser der Mengen A_k gegen 0 konvergiert. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $\{x\} = \bigcap_{k \geq 0} A_k$.

Beweis. Wähle für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Element $x_k \in A_k$. Sei $\epsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\text{diam}(A_k) < \epsilon$ für alle $k \geq k_0$. Dann ist $d(x_k, x_\ell) < \epsilon$ für alle $k, \ell \geq k_0$. Also ist $(x_k)_{k \geq 0}$ eine Cauchy-Folge in (X, d) . Wegen der vorausgesetzten Vollständigkeit von (X, d) existiert der Limes $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ in X . Nach Satz 2.3 (siehe auch Korollar 1.18) folgt aus der Abgeschlossenheit der Mengen A_k und der Bedingung, dass die Mengen A_k mit wachsendem k kleiner werden, dass

$$x = \lim_{\substack{\ell \rightarrow \infty \\ \ell \geq k}} x_\ell \in A_k$$

ist für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist $y \in X$ ein weiteres Element mit $y \in A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt $d(x, y) \leq \text{diam}(A_k)$ für alle k und damit $d(x, y) = 0$. Also besteht der Durchschnitt aller Mengen A_k genau aus dem einen Element x . $\square$

Definition 2.7. (Stetigkeit) Seien (X, d) , (Y, d') metrische Räume, $D \subset X$ eine Teilmenge und $f : D \rightarrow Y$ eine Abbildung.

(a) Für $a \in \overline{D}$ und $c \in Y$ schreibt man

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c,$$

falls $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = c$ ist für jede Folge $(x_k)_{k \geq 0}$ in X mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$.

(b) Die Funktion $f : D \rightarrow Y$ heißt *stetig in einem Punkt* $a \in D$, falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ist.

(c) Die Funktion $f : D \rightarrow Y$ heißt *stetig*, falls sie in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

Man sieht sehr leicht, dass eine Funktion $f : D \rightarrow Y$ wie in der letzten Definition stetig ist (oder stetig in einem Punkt $a \in D$ ist) genau dann, wenn f als Funktion von D versehen mit der Relativmetrik von X nach Y dieselbe Eigenschaft hat (siehe Beispiel 1.2 (c)).

Satz 2.8. Sind $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen, so ist auch die Komposition $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig.

Beweis. Ist $(x_k)_{k \geq 0}$ eine konvergente Folge in X mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, so gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$ in Y , da f stetig ist, und $\lim_{k \rightarrow \infty} g \circ f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(f(x_k)) = g(f(a))$ in Z , da g stetig ist. $\square$

Lemma 2.9. Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Die Koordinatenprojektionen

$$\pi_\nu : K^n \rightarrow K, (x_i)_{i=1}^n \mapsto x_\nu (\nu = 1, \dots, n)$$

sind stetig.

Beweis. Nach Lemma 2.2 ist die Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}^n$ (und genauso in $\mathbb{C}^n$) äquivalent zur komponentenweisen Konvergenz. Insbesondere impliziert Konvergenz in K^n komponentenweise Konvergenz. Das ist äquivalent zur Stetigkeit der Koordinatenprojektionen $\pi_1, \dots, \pi_n$. $\square$

Als Folgerung erhält man, dass eine Abbildung mit Werten in K^n ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) genau dann stetig ist, wenn alle Koordinatenfunktionen stetig sind.

Satz 2.10. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \rightarrow K^n$ ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) eine Abbildung. Die Abbildung f ist stetig genau dann, wenn alle ihre Koordinatenfunktionen $f_\nu = \pi_\nu \circ f : X \rightarrow K$ stetig sind.

Beweis. Ist $f : X \rightarrow K^n$ stetig, so sind die Koordinatenfunktionen $\pi_\nu \circ f : X \rightarrow K$ ($\nu = 1, \dots, n$) nach Satz 2.8 und Lemma 2.9 als Kompositionen stetiger Abbildungen stetig.

Seien umgekehrt alle Koordinatenfunktionen $\pi_\nu \circ f : X \rightarrow K$ ($\nu = 1, \dots, n$) stetig. Ist $(x_k)_{k \geq 0}$ eine konvergente Folge in X mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, so konvergiert die Folge $(f(x_k))_{k \geq 0}$ wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_\nu(f(x_k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\pi_\nu \circ f)(x_k) = (\pi_\nu \circ f)(a) = \pi_\nu(f(a)) \quad (1 \leq \nu \leq n)$$

komponentenweise in K^n gegen $f(a)$. Nach Lemma 2.2 gilt auch $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$ in K^n . $\square$

Die Grenzwertsätze in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) besagen gerade, dass die algebraischen Operationen Addition, Multiplikation, Quotientenbildung stetige Abbildungen zwischen geeignet definierten metrischen Räumen sind.

Satz 2.11. *Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und $K^* = K \setminus \{0\}$. Versieht man $K^2 = K \times K$ mit der euklidischen Metrik, so sind die Abbildungen*

- (a) $\text{add} : K \times K \rightarrow K, (x, y) \mapsto x + y,$
- (b) $m : K \times K, (x, y) \mapsto x \cdot y,$
- (c) $q : K \times K^* \rightarrow K, (x, y) \mapsto \frac{x}{y}$

stetig.

Beweis. Sei $((x_k, y_k))_{k \geq 0}$ eine Folge mit Limes (x, y) in $K \times K$ (bzw. $K \times K^*$). Nach Lemma 2.2 gilt dann $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$, $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$ in K und $y_k \neq 0 \neq y$ im Falle (c). Nach den Grenzwertsätzen aus der Analysis I folgt, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k + y_k) = x + y$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k \cdot y_k) = x \cdot y$ und im Falle (c) auch $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{y_k} = \frac{x}{y}$ ist. Nach Definition 2.7 bedeutet dies genau, dass die angegebenen drei Abbildungen stetig sind. $\square$

Korollar 2.12. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $f, g : X \rightarrow K$ ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) stetig. Dann sind auch*

- (a) $f + g : X \rightarrow K, x \mapsto f(x) + g(x), f \cdot g : X \rightarrow K, x \mapsto f(x)g(x)$ und
- (b) $\frac{f}{g} : X_0 = \{x \in X; g(x) \neq 0\} \rightarrow K, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$

stetig.

Beweis. Nach Satz 2.10 sind die Abbildungen

$$(f, g) : X \rightarrow K^2, x \mapsto (f(x), g(x))$$

und, wenn man $K \times K^*$ mit der Relativmetrik von $K \times K$ versieht,

$$(f, g), X_0 \rightarrow K \times K^*, x \mapsto (f(x), g(x))$$

stetig. Nach den Sätzen 2.8 und 2.11 sind dann auch

$$f + g = \text{add} \circ (f, g), \quad f \cdot g = m \circ (f, g), \quad \frac{f}{g} = q \circ (f, g) : X_0 \rightarrow K$$

als Kompositionen stetiger Abbildungen stetig. $\square$

Beispiel 2.13. (a) Ein *Monom vom Grade r* auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung der Form

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

wobei $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ feste Zahlen sind mit $k_1 + \dots + k_n = r$. Eine *Polynomfunktion vom Grade $\leq r$* auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung der Form

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n \\ k_1 + \dots + k_n \leq r}} c_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n},$$

wobei $c_{k_1 \dots k_n}$ fest gegebene reelle Zahlen seien. Nach Lemma 2.9 und Korollar 2.12 (endlich oft angewendet) sind diese Funktionen stetig.

(b) Ist V ein normierter Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, so ist die Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$ stetig. Dies folgt direkt aus der Gültigkeit der Dreiecksungleichung nach unten (siehe die Bemerkung zu Definition 1.3)

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \quad (x, y \in V).$$

Wie in der Analysis I kann man auch die Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen mit einem geeigneten ϵ - δ -Kriterium beschreiben.

Satz 2.14. (ϵ - δ -Kriterium) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen und sei $a \in X$. Die Abbildung f ist stetig in a genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$f(B_\delta(a)) \subset B_\epsilon(f(a)).$$

Beweis. Sei f stetig in a und sei $\epsilon > 0$. Gäbe es kein δ mit der behaupteten Eigenschaft, so würde zu jedem $k \in \mathbb{N}^*$ ein Element $x_k \in B_{\frac{1}{k}}(a)$ existieren mit $f(x_k) \notin B_\epsilon(f(a))$. Dann würde $(x_k)_{k \geq 1}$ gegen a in X konvergieren, aber $(f(x_k))_{k \geq 1}$ würde nicht in Y gegen $f(a)$ konvergieren. Dies widerspricht der vorausgesetzten Stetigkeit von f in a .

Sei umgekehrt das angegebene ϵ - δ -Kriterium im Punkt a erfüllt. Konvergiert $(x_k)_{k \geq 0}$ in X gegen a und ist $\epsilon > 0$, so gibt es nach Voraussetzung ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(a)) \subset B_\epsilon(f(a))$. Zu dem so gewählten $\delta > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in B_\delta(a)$ für alle $k \geq k_0$. Dann ist $d(f(x_k), f(a)) < \epsilon$ für alle $k \geq k_0$. Also konvergiert $(f(x_k))_{k \geq 0}$ in Y gegen $f(a)$, und die Stetigkeit von f in a ist gezeigt. $\square$

Beispiel 2.15. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subset X$ eine Menge. Für $x \in X$ definiert man den *Abstand von x zu A* durch

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Die Funktion $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, A)$ ist stetig. Es gilt sogar

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$. Zum Beweis seien $x, y \in X$ beliebig. Dann gilt für alle $a \in A$

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Indem man auf beiden Seiten das Infimum bildet, erhält man

$$\inf_{a \in A} d(x, a) \leq \inf_{a \in A} (d(x, y) + d(y, a)) = d(x, y) + \inf_{a \in A} d(y, a).$$

oder äquivalent

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

Durch vertauschen von x, y erhält man, dass auch

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x) = d(x, y)$$

gilt. Hieraus folgt die behauptete Ungleichung und damit auch die Stetigkeit der Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, A)$.

Definition 2.16. (Gleichmäßige Konvergenz)

Seien X, Y metrische Räume und seien $f_n : X \rightarrow Y$ ($n \in \mathbb{N}$), $f : X \rightarrow Y$ Abbildungen. Die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ konvergiert definitionsgemäß *gleichmäßig* auf X gegen die Abbildung f , falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert so, dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ für alle $x \in X$ gilt.

Offensichtlich ist die definierende Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ gegen f äquivalent dazu, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $\sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Satz 2.17. Seien X, Y metrische Räume und seien $f_n : X \rightarrow Y$ ($n \in \mathbb{N}$), $f : X \rightarrow Y$ Abbildungen. Sind alle f_n ($n \in \mathbb{N}$) stetig und konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf X gegen f , so ist auch $f : X \rightarrow Y$ stetig.

Beweis. Sei $x_0 \in X$ und sei $\epsilon > 0$. Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $x \in X$ und alle $n \geq n_0$. Da f_{n_0} stetig ist in x_0 , gibt es nach dem ϵ - δ -Kriterium ein $\delta > 0$ mit $f_{n_0}(B_\delta(x_0)) \subset B_{\frac{\epsilon}{3}}(f_{n_0}(x_0))$. Mit der Dreiecksungleichung folgt für alle $x \in B_\delta(x_0)$, dass

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + d(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

gilt. Also ist f stetig in x_0 . □

Für die Stetigkeit linearer Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen gibt es andere nützliche Kriterien.

Satz 2.18. *Seien V, W normierte K -Vektorräume über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ ist stetig genau dann, wenn es eine Konstante $c \geq 0$ gibt mit $\|Ax\| \leq c\|x\|$ für alle $x \in V$.*

Beweis. Sei A stetig. Da A stetig ist im Punkt $x = 0$ mit $A0 = 0$, gibt es nach dem ϵ - δ -Kriterium (Satz 2.14) zu $\epsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit $AB_\delta(0) \subset B_1(0)$. Da für alle $x \in V \setminus \{0\}$

$$\|Ax\| = \frac{2}{\delta}\|x\| \left\| A\left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$$

gilt, ist das behauptete Stetigkeitskriterium erfüllt mit $c = \frac{2}{\delta}$. Ist umgekehrt $c > 0$ eine Konstante wie im Satz und sind $x_0 \in V$, $\epsilon > 0$ gegeben, so gilt

$$\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| \leq c\|x - x_0\| < \epsilon$$

für alle $x \in V$ mit $\|x - x_0\| < \frac{\epsilon}{c}$. Nach dem ϵ - δ -Kriterium ist A stetig in jedem Punkt $x_0 \in V$. □

Beispiele.

- (a) Versieht man den $\mathbb{R}$ -Vektorraum $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ ist stetig}\}$ mit der Norm (siehe Beispiel 1.7)

$$\|f\|_{[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$

so definiert

$$I : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_a^b f dt$$

eine stetige lineare Abbildung. In der Analysis I wurde gezeigt, dass das Riemann-Integral linear ist. Die Stetigkeit von I folgt mit Satz 2.18 aus der Gültigkeit der Abschätzung

$$|I(f)| = \left| \int_a^b f dt \right| \leq \int_a^b |f| dt \leq \int_a^b \|f\|_{[a,b]} dt = (b - a)\|f\|_{[a,b]},$$

die ebenfalls in der Analysis I (Satz 16.13 (b) in [EAI]) für alle stetigen Funktionen $f \in C[a, b]$ gezeigt wurde.

- (b) Sei der $\mathbb{R}$ -Vektorraum $C^1[0, 1] = \{f; f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig differenzierbar}\}$ mit der Norm $\|\cdot\|_{[0,1]}$ aus Teil (a) versehen. Dann ist die Abbildung

$$D : C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1], f \mapsto f'$$

linear, aber nicht stetig. Die Linearität ist klar. Da die Funktionen $f_n \in C^1[0, 1]$ definiert durch $f_n(x) = x^n$ die Norm $\|f_n\|_{[0,1]} = 1$ besitzen, aber die Folge der Normen

$$\|f'_n\|_{[0,1]} = \|nx^{n-1}\|_{[0,1]} = n \quad (n \geq 1)$$

unbeschränkt ist, folgt mit Satz 2.18, dass die Abbildung D nicht stetig ist.

Definition 2.19. Seien V, W normierte K -Vektorräume und $A : V \rightarrow W$ eine stetige lineare Abbildung. Dann heißt

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|; \|x\| \leq 1\}$$

die *Norm* oder *Operatorraum* von A .

Nach Satz 2.18 ist $\|A\| \in [0, \infty)$. Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|; \|x\| < 1\} = \sup\{\|Ax\|; \|x\| = 1\}$$

gilt und dass die Operatornorm wirklich eine Norm auf dem K -Vektorraum

$$\{A : V \rightarrow W; A \text{ ist linear und stetig}\}$$

definiert.

Lemma 2.20. Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann ist jede lineare Abbildung $A : K^n \rightarrow K^m$ stetig.

Beweis. Da die konvergenten Folgen bezüglich der Summenmetrik $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ und der euklidischen Metrik $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ sowohl in K^n als auch in K^m dieselben sind (Bemerkung 1.6), genügt es zu zeigen, dass $A : K^n \rightarrow K^m$ bezüglich der Summennormen auf K^n und K^m stetig ist. Da für alle $x = (x_i)_{i=1}^n$

$$\|Ax\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i A e_i \right\|_1 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|A e_i\| \leq \left(\max_{i=1, \dots, n} \|A e_i\| \right) \|x\|_1$$

gilt, folgt dies direkt aus Satz 2.18. Hierbei bezeichnet $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ den i -ten kanonischen Einheitsvektor in K^n . □

Für $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ sei $M_A : K^n \rightarrow K^m$, $x \mapsto Ax = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)_{1 \leq i \leq m}$ der Operator der Multiplikation mit der $(m \times n)$ -Matrix A . Wie immer, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes vorausgesetzt wird, seien die K -Vektorräume K^n, K^m mit ihrer euklidischen Norm versehen.

Lemma 2.21. Seien $m, n \in \mathbb{N}^*$. Durch

$$\|\cdot\| : M(m \times n, K) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|A\| = \|M_A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|M_A x\|$$

wird eine Norm auf $M(m \times n, K)$ definiert. Es gilt

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

für alle $A \in M(m \times n, K)$ und $x \in K^n$.

Beweis. Nach Lemma 2.20 ist $\|A\| \in [0, \infty)$. Für $A, B \in M(m \times n, K)$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(\lambda A)x\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\lambda| \|Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\|$$

und

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A + B)x\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\| \leq 1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|.$$

Für $x \in K^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\|Ax\| = \|A\| \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \|x\| \leq \|A\| \|x\|.$$

Insbesondere ist $A = 0$ genau dann, wenn $\|A\| = 0$ ist. Damit sind alle Behauptungen bewiesen. $\square$

Bemerkung 2.22. Für $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ gilt

$$\max\{|a_{ij}|; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \leq \|A\| \leq \sqrt{mn} \max\{|a_{ij}|; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Zum Beweis der ersten Ungleichung beachte man, dass für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ gilt

$$\|A\| \geq \|Ae_j\| = \|(a_{\mu j})_{1 \leq \mu \leq m}\| \geq |a_{ij}|.$$

Sei $\alpha = \max\{|a_{ij}|; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. Für $x = (x_i) \in K^n$ mit $\|x\| \leq 1$ und $y = (y_i) = Ax \in K^m$ folgt mit Bemerkung 1.6 und Beispiel 1.5 (a), dass

$$\begin{aligned} |y_i| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \|(a_{ij})_{1 \leq j \leq n}\|_2 \|x\|_2 \\ &\leq \sqrt{n} \max_{j=1, \dots, n} |a_{ij}| \leq \sqrt{n} \alpha \end{aligned}$$

für alle $i = 1, \dots, m$ gilt. Also ist $\|y\|_2 \leq \sqrt{m} \max_{i=1, \dots, m} |y_i| \leq \sqrt{nm} \alpha$. Damit ist auch die zweite Ungleichung bewiesen. Als Anwendung dieser beiden Ungleichungen erhält man, dass eine Folge von Matrizen in $M(m \times n, K)$ genau dann konvergiert, wenn sie koeffizientenweise konvergiert, und dass eine Funktion von einem metrischen Raum mit Werten in $M(m \times n, K)$ genau dann stetig ist, wenn alle Koeffizientenfunktionen als K -wertige Abbildungen stetig sind.

Satz 2.23. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen X und Y ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(V) \subset X$ von V unter f eine offene Teilmenge von X ist.

Beweis. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und seien $V \subset Y$ offen, $x \in f^{-1}(V)$. Da V offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(f(x)) \subset V$. Nach dem ϵ - δ -Kriterium der Stetigkeit (Satz 2.14) gibt es zu ϵ ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$. Also haben wir zu jedem Punkt $x \in f^{-1}(V)$ ein $\delta > 0$ gefunden mit $B_\delta(x) \subset f^{-1}(V)$. Damit ist die Offenheit von $f^{-1}(V)$ gezeigt.

Sei umgekehrt das Urbild jeder offenen Teilmenge $V \subset Y$ unter f offen in X . Für $x \in X$ und $\epsilon > 0$ ist dann die durch $U = f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ definierte Menge U offen in X . Wegen $x \in U$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset U$. Dann folgt aber $f(B_\delta(x)) \subset f(U) \subset B_\epsilon(f(x))$, und die Stetigkeit von f in jedem Punkt $x \in X$ ist gezeigt. $\square$

Literatur

[EAI] Eschmeier, J., Analysis I, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2013.