3 Kompaktheit

In der Analysis I zeigt man, dass stetige Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf abgeschlossenen, beschränkten Intervallen $[a, b]$ gleichmäßig stetig und beschränkt sind und dass sie ihr Supremum und Infimum annehmen. Wir wollen als nächstes zeigen, dass diese Sätze in viel allgemeineren Situationen richtig bleiben. Sei im Folgenden (X, d) ein metrischer Raum.

Definition 3.1. Sei $A \subset X$. Unter einer *offenen Überdeckung* von A versteht man eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Mengen $U_i \subset X$ mit

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

und beliebiger Indexmenge I .

Welche Eigenschaft von Intervallen der Form $[a, b]$ braucht man, um die oben erwähnten Sätze aus der Analysis I zu beweisen?

Definition 3.2. (Kompaktheit) Eine Menge $K \subset X$ heißt *kompakt*, falls für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von K endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_k \in I$ existieren mit $K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$.

Beispiele 3.3. (a) Ist $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ in (X, d) , so ist die Menge $K = \{x_k; k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subset X$ kompakt.

Denn ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K , so gibt es ein $j \in I$ mit $x \in U_j$ und dazu einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in U_j$ für alle $k > k_0$. Für $k = 0, \dots, k_0$ gibt es Indizes $i_0, \dots, i_{k_0} \in I$ mit $x_k \in U_{i_k}$ für $k = 0, \dots, k_0$. Dann ist aber $K \subset U_{i_0} \cup \dots \cup U_{i_{k_0}} \cup U_j$.

(b) Die Teilmenge $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$ ist nicht kompakt. Denn die offenen Mengen $U_1 =]\frac{1}{2}, 2[$, $U_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}[$ ($n \geq 2$) bilden eine offene Überdeckung von A . Da $U_n \cap A = \{\frac{1}{n}\}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}^*$, enthält $(U_n)_{n \geq 1}$ keine endliche Teilüberdeckung der Menge A .

Der nächste Satz zeigt insbesondere, dass abgeschlossene, beschränkte Intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt sind.

Satz 3.4. Seien $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}$ mit $a_\nu \leq b_\nu$ für $\nu = 1, \dots, n$. Dann ist die Menge $Q = \prod_{\nu=1}^n [a_\nu, b_\nu] \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Q . Wir nehmen an, dass diese Überdeckung keine endliche Teilüberdeckung von Q enthält. Unter dieser Annahme definieren wir rekursiv eine Folge $(Q_k)_{k \geq 0}$ abgeschlossener Quader $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ so, dass $Q_0 = Q$ ist und für alle $k \geq 0$ gilt

(i) $Q_k \subset Q_{k-1}$,

(ii) Q_k kann nicht durch endlich viele U_i ($i \in I$) überdeckt werden,

(iii) $\text{diam}(Q_k) = 2^{-k} \text{diam}(Q)$.

Dabei sei definitionsgemäß $Q_{-1} = \mathbb{R}^n$. Dazu definieren wir $Q_0 = Q$. Sind $Q_0, \dots, Q_m$ gewählt mit (i)-(iii) für $k = 0, \dots, m$ und ist $Q_m = I_1 \times \dots \times I_m$ mit geschlossenen Intervallen $I_\nu \subset \mathbb{R}$, so stellen wir I_ν durch Halbieren dar als Vereinigung

$$I_\nu = I_\nu^1 \cup I_\nu^2$$

zweier abgeschlossener Intervalle halber Länge und definieren für $s = (s_1, \dots, s_n) \in \{1, 2\}^n$

$$Q_m^s = I_1^{s_1} \times \dots \times I_n^{s_n}.$$

Dann ist

$$Q_m = \bigcup (Q_m^s; s \in \{1, 2\}^n)$$

und jede der Mengen Q_m^s ist ein abgeschlossener Quader mit

$$\text{diam}(Q_m^s) = \left(\sum_{\nu=1}^n \text{Länge}(I_\nu^{s_\nu})^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \text{diam}(Q_m) = \frac{1}{2^{m+1}} \text{diam}(Q).$$

Da Q nicht durch endlich viele der Mengen U_i ($i \in I$) überdeckt werden kann, gilt dasselbe für mindestens einen der Quader Q_m^s ($s \in \{1, 2\}^n$). Wähle ein solches s und setze $Q_{m+1} = Q_m^s$. Damit ist die rekursive Definition abgeschlossen.

Nach dem Schachtelungsprinzip (Satz 2.6) gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\{x\} = \bigcap_{k \geq 0} Q_k.$$

Wegen $x \in Q$ gibt es ein $i_0 \in I$ und ein $\epsilon > 0$ mit $x \in B_\epsilon(x) \subset U_{i_0}$. Zu $\epsilon > 0$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\text{diam}(Q_{k_0}) < \epsilon$. Dann ist aber

$$x \in Q_{k_0} \subset B_\epsilon(x) \subset U_{i_0}$$

im Widerspruch zur Wahl der Quader Q_k . Also war die Annahme falsch, und die Kompaktheit von Q ist gezeigt. $\square$

Lemma 3.5. (a) Ist $K \subset X$ kompakt und ist $A \subset X$ abgeschlossen mit $A \subset K$, so ist A kompakt.

(b) Ist $K \subset X$ kompakt, so ist $K \subset X$ abgeschlossen.

Beweis. (a) Seien K und A wie in Teil (a) beschrieben. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A , so ist

$K \subset (X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in I} U_i$. Da K kompakt ist und da auch die Menge $X \setminus A$ offen ist, gibt es $i_1, \dots, i_r \in I$ mit $K \subset (X \setminus A) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$. Dann ist aber $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$.

(b) Sei $K \subset X$ kompakt und sei $a \in X \setminus K$. Nach Satz 1.12 gibt es zu jedem Punkt $x \in K$ offene Umgebungen U_x von x und V_x von a mit $U_x \cap V_x = \emptyset$. Da K kompakt ist, gibt es endliche viele $x_1, \dots, x_r \in K$ mit $K \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_r}$. Dann ist $V = \bigcap_{i=1}^r V_{x_i}$ eine offene Umgebung von a mit $V \subset X \setminus K$. Also enthält $X \setminus K$ zusammen mit jedem Punkt a noch eine ganze offene Umgebung von a . Damit ist die Offenheit von $X \setminus K$ gezeigt. $\square$

Definition 3.6. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *beschränkt*, falls

$$\sup\{\|x\|; x \in A\} < \infty$$

ist. Eine einfache Charakterisierung kompakter Mengen in $\mathbb{R}^n$ gibt der *Satz von Heine-Borel*.

Satz 3.7. (Satz von Heine-Borel) *Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Nach Lemma 3.5 ist $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Da $K \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} B_k(0)$ eine offene Überdeckung von K bildet, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $K \subset B_{k_0}(0)$. Also ist K auch beschränkt.

Sei umgekehrt $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt. Dann ist

$$c = \sup_{x \in K} \|x\| < \infty$$

und K ist enthalten in dem abgeschlossenen Quader $Q = [-c, c] \times \dots \times [-c, c] \subset \mathbb{R}^n$. Da Q nach Satz 3.4 kompakt ist und $K \subset \mathbb{R}^n$ nach Voraussetzung abgeschlossen ist, folgt mit Teil (a) von Lemma 3.5, dass $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist. $\square$

Man kann zeigen, dass in jedem unendlich dimensional normierten Raum abgeschlossene, beschränkte Mengen existieren, die nicht kompakt sind. Dies beweist man etwa in der Funktionalanalysis.

Satz 3.8. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist $K \subset X$ kompakt, so hat jede Folge in K eine konvergente Teilfolge mit Limes in K .*

Beweis. Sei $K \subset X$ kompakt und sei $(x_k)_{k \geq 0}$ eine Folge in K . Hätte $(x_k)_{k \geq 0}$ keine konvergente Teilfolge mit Limes in K , so gäbe es für jeden Punkt $x \in K$ eine offene Umgebung U_x von x so, dass die Menge

$$\{k \in \mathbb{N}; x_k \in U_x\}$$

endlich ist. Denn sonst könnte man rekursiv eine Teilfolge von (x_k) mit Limes $x \in K$ definieren. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \dots, x_r \in K$ mit $K \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_r}$. Dann wäre aber die Menge $\mathbb{N} = \{k \in \mathbb{N}; x_k \in K\}$ endlich. Dieser Widerspruch beendet den Beweis. $\square$

Bemerkung.

Man kann zeigen, dass auch die Umkehrung der Implikation aus Satz 3.8 gilt. Im $\mathbb{R}^n$ ist dies mit Hilfe des Satzes von Heine-Borel sehr einfach. Für beliebige metrische Räume beweist man die Umkehrung in der Topologie oder Funktionalanalysis.

Korollar 3.9. (Satz von Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{R}^n$).

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Dann ist $r = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|x_k\| < \infty$ und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\overline{B}_r(0)$. Da diese Menge nach dem Satz von Heine-Borel kompakt ist, hat $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nach Satz 3.8 eine konvergente Teilfolge mit Limes in $\overline{B}_r(0)$. $\square$

Genau wie der Satz von Heine-Borel, der im obigen Beweis benutzt wurde, gilt der Satz von Bolzano-Weierstraß in keinem unendlich dimensional normierten Raum.

Der Satz über die Beschränktheit stetiger Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf abgeschlossenen, endlichen Intervallen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist ein Spezialfall des nächsten Ergebnisses.

Satz 3.10. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Für jede kompakte Menge $K \subset X$ ist $f(K) \subset Y$ kompakt.*

Beweis. Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Nach Satz 2.23 sind alle Urbilder $f^{-1}(V_i) \subset X$ ($i \in I$) offen. Da die Vereinigung dieser Mengen K enthält, gibt es $i_1, \dots, i_r \in I$ mit

$$K \subset f^{-1}(V_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{i_r}).$$

Dann ist $f(K) \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_r}$. Also enthält jede offene Überdeckung von $f(K)$ eine endliche Teilüberdeckung, und $f(K)$ ist definitionsgemäß kompakt. $\square$

Reellwertige stetige Abbildungen auf einer kompakten Menge nehmen ihr Supremum und Infimum an.

Korollar 3.11. *Sei $K \subset X$ kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes X und sei $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und es gibt Punkte $a, b \in K$ mit*

$$f(a) = \min f(K), \quad f(b) = \max f(K).$$

Beweis. Versieht man K mit der Relativmetrik $d_K = d|_{K \times K}$ (siehe Beispiel 1.2 (c)), so wird $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ zu einer stetigen Abbildung auf dem metrischen Raum (K, d_K) . Es ist sehr einfach zu sehen, dass die Kompaktheit von $K \subset X$ als Teilmenge des metrischen Raumes (X, d) äquivalent zur Kompaktheit von K als Teilmenge des metrischen Raumes (K, d_K) ist. Also folgt mit Satz 3.10, dass $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt ist. Nach Korollar 3.7 ist $f(K) \subset \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen. Da man das Supremum und Infimum einer Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ immer als Grenzwerte geeigneter Folgen aus M darstellen kann, gibt es Folgen $(y_k)_{k \geq 0}, (z_k)_{k \geq 0}$ in $f(K)$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \inf f(K), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \sup f(K).$$

Da $f(K) \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, folgt mit Satz 2.3, dass $a, b \in K$ existieren mit $f(a) = \inf f(K)$ und $f(b) = \sup f(K)$. $\square$

In der Analysis I zeigt man, dass jede stetige Abbildung $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist. Auch für diesen Satz ist die Kompaktheit des Definitionsbereiches die entscheidende Eigenschaft.

Definition 3.12. Seien X, Y metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$.

Satz 3.13. Seien X, Y metrische Räume und sei $K \subset X$ kompakt. Dann ist jede stetige Abbildung $f : K \rightarrow Y$ *gleichmäßig stetig* (Hierbei sei K mit der Relativmetrik von X versehen).

Beweis. Sei $K \subset X$ kompakt und $f : K \rightarrow Y$ stetig. Wäre f nicht gleichmäßig stetig, so würde es ein $\epsilon > 0$ geben so, dass für jedes $\delta > 0$ Elemente $x, y \in K$ existieren würden mit $d(x, y) < \delta$, aber $d(f(x), f(y)) \geq \epsilon$. Insbesondere könnte man Folgen $(x_k)_{k \geq 1}, (y_k)_{k \geq 1}$ in K wählen mit $d(x_k, y_k) < \frac{1}{k}$ und $d(f(x_k), f(y_k)) \geq \epsilon$ für alle $k \geq 1$. Nach Satz 3.8 hätte die Folge $(x_k)_{k \geq 1}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{k_n})_{n \geq 1}$ mit Limes $x \in K$. Wegen

$$d(x, y_{k_n}) \leq d(x, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, y_{k_n}) \xrightarrow{n} 0$$

konvergiert auch die Folge $(y_{k_n})_{n \geq 1}$ gegen x . Aus der Stetigkeit von f in x folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_{k_n})$. Dies ist nicht möglich, da für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 < \epsilon \leq d(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \leq d(f(x_{k_n}), f(x)) + d(f(x), f(y_{k_n}))$$

gilt und die rechte Seite als Folge in n gegen 0 konvergiert. Also war unsere Annahme falsch und die gleichmäßige Stetigkeit von f ist gezeigt. □