4 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall (offen, halboffen, abgeschlossen, beschränkt oder unbeschränkt), das mindestens einen Punkt enthält.

Definition 4.1. (a) Unter einer *Kurve* im $\mathbb{R}^n$ versteht man eine stetige Abbildung $f : I \to \mathbb{R}^n$, die als Definitionsbereich ein Intervall I wie oben besitzt.

(b) Eine Kurve $f = (f_1, \dots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ heißt *differenzierbar* (*stetig differenzierbar*), falls alle Koordinatenfunktionen $f_\nu : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar (stetig differenzierbar) sind.

Beispiele 4.2. (a) Seien $a \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Die Kurve

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \; f(t) = a + tv$$

beschreibt eine *Gerade* im $\mathbb{R}^n$ durch den Punkt a in Richtung v.

(b) Sei $r > 0$. Es gilt (Korollar 13.11 in [EAI])

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \; \|(x, y)\| = r\} = \{(r \cos t, \; r \sin t); \; t \in [0, 2\pi]\}.$$

Dies ist die Bildmenge der Kurve $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \; f(t) = (r \cos t, \; r \sin t)$.

(c) Seien $r > 0, \; c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Kurve

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \; f(t) = (r \cos t, \; r \sin t, \; ct)$$

beschreibt eine Schraubenlinie im $\mathbb{R}^3$ um die x_3-Achse.

(d) Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist der Graph von φ die Bildmenge der Kurve

$$f : I \to \mathbb{R}^2, \; f(t) = (t, \varphi(t)).$$

Definition 4.3. Sei $f : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und sei $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Man nennt x einen *Doppelpunkt* der Kurve f, wenn es $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 \neq t_2$ und $f(t_1) = x = f(t_2)$ gibt.

(b) Ist f differenzierbar und $t \in I$, so nennt man

$$f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t))$$

den *Tangentialvektor* von f zum Parameterwert t und

$$\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} (\text{ falls } f'(t) \neq 0 \text{ ist})$$

den *Tangenten-Einheitsvektor* von f zum Parameterwert t.

(c) Sei f stetig differenzierbar und $t_0 \in I$. Dann heißt f *regulär*, wenn $f'(t) \neq 0$ ist für alle $t \in I$. Man nennt t_0 singulären Parameterwert, falls $f'(t_0) = 0$ ist.

Beispiele 4.4. (a) Ist $f : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar und ist $f(t_1) = x = f(t_2)$ mit $t_1 \neq t_2$, so kann natürlich $f'(t_1) \neq f'(t_2)$ gelten. So ist etwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$ stetig differenzierbar mit $f(1) = (0,0) = f(-1)$ und wegen $f'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$ ist $f'(1) = (2,2) \neq (-2,2) = f'(-1)$.

(b) (*Neilsche Parabel*) Die stetig differenzierbare Kurve

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(t) = (t^2, t^3)$$

hat $t = 0$ als einzigen singulären Parameterwert, denn $f'(t) = (2t, 3t^2)$. Man prüft leicht nach, dass $f(\mathbb{R}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0 \text{ und } y = \pm x^{\frac{3}{2}}\}$.

Definition 4.5. Seien $f : I_1 \to \mathbb{R}^n,\ g : I_2 \to \mathbb{R}^n$ reguläre Kurven und seien $t_1 \in I_1,\ t_2 \in I_2$ mit $f(t_1) = g(t_2)$. Die eindeutige Zahl (Satz 13.13 in [EAI]) $\theta \in [0, \pi]$ mit

$$\cos\theta = \frac{\langle f'(t_1),\ g'(t_2)\rangle}{\|f'(t_1)\|\,\|g'(t_2)\|}$$

heißt der *Schnittwinkel* zwischen f und g bei den Parametern t_1 und t_2.

In Definition 4.5 bezeichnet

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Nach Beispiel 1.5 (a) gilt

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \quad (\textit{Cauchy-Schwarzsche Ungleichung})$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve ($a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$). Für jede Teilung $T = (t_i)_{i=0}^k$ von $[a,b]$, das heißt Punkte t_i mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$, nennen wir

$$L(f,T) = \sum_{i=1}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$$

die *Länge* des durch die Folge $(f(t_i))_{i=0}^k$ definierten Polygonzuges.

Definition 4.6. Eine Kurve $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *rektifizierbar*, falls es eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ gibt so, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $L(f,T) < \epsilon$ für jede Teilung T von $[a,b]$ mit Feinheit $\omega(T) < \delta$. In diesem Fall heißt L die *Länge* oder *Bogenlänge* von f (geschrieben $L(f)$). Hierbei ist die Feinheit oder Spurweite einer Teilung $T = (t_i)_{i=0}^k$ von $[a,b]$ definiert durch $\omega(T) = \max_{i=1,\ldots,k}(t_i - t_{i-1})$ (Definition 16.10 in [EAI]).

Lemma 4.7. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Seien $S = (s_i)_{i=0}^k$ und $T = (t_j)_{j=0}^m$ Teilungen von $[a,b]$. Ist S feiner als T (das heißt $t_j = s_{i_j}$ für geeignete $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_m = k$), so ist*

$$L(f,T) \leq L(f,S).$$

Beweis. Die Behauptung folgt als Anwendung der Dreiecksungleichung

$$L(f,T) = \sum_{j=1}^{m} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{m} \left\| \sum_{\nu=i_{j-1}+1}^{i_j} f(s_\nu) - f(s_{\nu-1}) \right\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=i_{j-1}+1}^{i_j} \|f(s_\nu) - f(s_{\nu-1})\| = L(f,S). \qquad \square$$

Satz 4.8. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve ($a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$). Dann ist f rektifizierbar genau dann, wenn das Supremum*

$$s = \sup\{L(f,T);\ T \text{ Teilung von } [a,b]\}$$

endlich ist. In diesem Fall ist $L(f) = s$.

Beweis. Sei f rektifizierbar. Sei $\epsilon > 0$ und T eine Teilung von $[a,b]$. Zu ϵ wähle man ein $\delta > 0$ wie in Definition 4.6. Dann gibt es eine Teilung S, die feiner ist als T, mit $\omega(S) < \delta$. Mit Lemma 4.7 folgt, dass

$$L(f,T) \leq L(f,S) \in \,]L(f) - \epsilon,\ L(f) + \epsilon[.$$

Da T eine beliebige Teilung von $[a,b]$ ist, können wir schließen, dass

$$L(f) + \epsilon \geq s \geq L(f,S) > L(f) - \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt hieraus, dass $s = L(f)$ ist.
Sei umgekehrt das Supremum $s < \infty$ und sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es eine Teilung $S = (s_j)_{j=0}^m$ mit $L(f,S) > s - \frac{\epsilon}{2}$. Da f nach Satz 3.13 gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $\delta < \min_{j=1,\ldots,m}(s_j - s_{j-1})$ so, dass

$$\|f(t) - f(s)\| < \epsilon/4m$$

ist für alle $s, t \in [a,b]$ mit $|s - t| < \delta$. Sei $T = (t_i)_{i=0}^k$ eine beliebige Teilung von $[a,b]$ mit $\omega(T) < \delta$ und sei

$$I = \{i \in \{1, \ldots, k\};\ ]t_{i-1},\ t_i[\, \cap \{s_0, \ldots, s_m\} \neq \varnothing\}.$$

Dann gibt es zu jedem $i \in I$ genau einen Index $j_i \in \{0, \ldots, m\}$ mit $s_{j_i} \in \,]t_{i-1}, t_i[$. Mit Lemma 4.7 erhalten wir

$$L(f,S) \leq \sum_{\substack{i=1,\ldots,k \\ i \notin I}} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| + \sum_{i \in I} \left(\|f(t_i) - f(s_{j_i})\| + \|f(s_{j_i}) - f(t_{i-1})\| \right).$$

Die Summanden in der zweiten Summe schätzen wir ab nach oben gegen

$$\|f(t_i) - f(t_{i-1})\| + 2\|f(s_{j_i}) - f(t_{i-1})\|$$

und erhalten

$$L(f,S) \leq L(f,T) + 2(m-1)(\epsilon/4m) < L(f,T) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Insgesamt folgt, dass

$$s \geq L(f,T) \geq L(f,S) - \frac{\epsilon}{2} > s - \epsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass f rektifizierbar ist und dass $L(f) = s$ ist. □

Das in Satz 4.8 gebildete Supremum s nennt man auch die *totale Variation* der Funktion f. Für stetig differenzierbare Kurven lässt sich die Länge als Riemann-Integral der Funktion $\|f'\|$ berechnen.

Satz 4.9. *Jede stetig differenzierbare Kurve $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar mit*

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Beweis. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und sei $\epsilon > 0$. Da die Funktionen $f_1', \ldots, f_n'$ gleichmäßig stetig sind, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f_\nu'(t) - f_\nu'(s)| < \epsilon/(\sqrt{n}(b-a))$$

für $s,t \in [a,b]$ mit $|s-t| < \delta$ und $\nu = 1, \ldots, n$. Sei $T = (t_i)_{i=0}^k$ eine Teilung von $[a,b]$ mit $\omega(T) < \delta$ und sei $i \in \{1, \ldots, k\}$. Es genügt zu zeigen, dass die Zahl

$$\Delta_i = \left| \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f'(t)\| dt \right|$$

kleiner als $(\epsilon/b-a)\ (t_i - t_{i-1})$ ist. Nach dem 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Korollar 15.4 in [EAI]) angewendet auf die Funktionen $f_\nu|_{[t_{i-1},t_i]}$ gibt es Zahlen $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \,]t_{i-1}, t_i[$ mit

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1})\ (f_\nu'(\tau_\nu))_{\nu=1}^n.$$

Da die Funktion $\|f'\|$ stetig ist (Beispiel 2.13 (b)), erlaubt es der 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 16.14 in [EAI]), eine Zahl $\tau \in [t_{i-1}, t_i]$ zu wählen mit

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f'(t)\| dt = \|f'(\tau)\|(t_i - t_{i-1}).$$

Mit Bemerkung 1.6 und der Dreiecksungleichung nach unten folgt die gewünschte Abschätzung

$$\begin{aligned}
\Delta_i &= \left| \|(f_\nu'(\tau_\nu))_{\nu=1}^n\| - \|f'(\tau)\| \right| (t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \|(f_\nu'(\tau_\nu) - f_\nu'(\tau))_{\nu=1}^n\|(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \sqrt{n} \max_{\nu=1,\ldots,n} |f_\nu'(\tau_\nu) - f_\nu'(\tau)|(t_i - t_{i-1}) \\
&< (\epsilon/(b-a))(t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

Summieren über $i = 1, \dots, k$ liefert, dass $|L(f,T) - \int_a^b \|f'\| dt| < \epsilon$ ist. Da T eine beliebige Teilung mit $\omega(T) < \delta$ ist, folgt die Behauptung. $\square$

Beispiele 4.10. (a) Seien $T > 0,\ c \in \mathbb{R}$ und $r > 0$. Die Länge der Schraubenlinie

$$f : [0,T] \to \mathbb{R}^3,\ f(t) = (r\cos t,\ r\sin t,\ ct)$$

ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_0^T \|f'(t)\| dt = \int_0^T \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2 + c^2} dt \\ &= \int_0^T \sqrt{r^2+c^2} dt = T\sqrt{r^2+c^2}. \end{aligned}$$

(b) (*Zykloide*) Wir beschreiben die Kurve im $\mathbb{R}^2 = \{(x,y);\ x,y \in \mathbb{R}\}$, die ein fester Punkt P auf einem Rad mit Radius $r = 1$ beim Abrollen auf der x-Achse beschreibt. Sei dazu

$$M = (0,1)$$

der Mittelpunkt des Rades zu Beginn und P der Punkt auf dem Rad, der zu Beginn die x-Achse berührt. Nachdem das Rad sich um den Winkel t gedreht hat, habe der Punkt P die Koordinaten $P(t) = (x(t), y(t))$. Dann gilt (§ 13 in [EAI])

$$\begin{aligned} x(t) &= t - \cos(t - \tfrac{\pi}{2}) &= t - \sin t \\ y(t) &= 1 + \sin(t - \tfrac{\pi}{2}) &= 1 - \cos t. \end{aligned}$$

Die Kurve $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ P(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)$ ist stetig differenzierbar mit

$$L(P|_{[0,2\pi]}) = \int_0^{2\pi} \|P'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt.$$

Wegen $2 - 2\cos t = 2\left(1 - \cos\left(2\frac{t}{2}\right)\right) = 2\left(1 - \cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}\right) = 4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ folgt

$$L(P|_{[0,2\pi]}) = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\, dt = -4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4 - (-4) = 8.$$

Definition 4.11. (Parametertransformationen)
Seien $[a,b]$ und $[\alpha,\beta]$ abgeschlossene Intervalle endlicher positiver Länge in $\mathbb{R}$.

(a) Eine stetige bijektive Abbildung $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ nennt man auch *Parametertransformation.*

(b) Eine Abbildung wie in (a) heißt C^1-*Parametertransformation*, falls φ und φ^{-1} stetig differenzierbar sind.

Bemerkung 4.12. (a) Ist $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine Parametertransformation, so ist φ^{-1} stetig (Sätze 11.2 und 11.4 in [EAI]).

(b) Ist $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare Parametertransformation, so ist φ eine C^1-Parametertransformation genau dann, wenn $\varphi'(t) \neq 0$ ist für alle $t \in [\alpha,\beta]$. Die Notwendigkeit dieser Bedingung folgt aus der Kettenregel

$$1 = (\varphi \circ \varphi^{-1})'(t) = \varphi'(\varphi^{-1}(t))\ (\varphi^{-1})'(t) \quad (t \in [a,b]).$$

Die umgekehrte Implikation folgt aus dem Satz über die Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen (Satz 14.12 in [EAI]).

(c) Ist $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine Parametertransformation, so ist (Satz 11.2 in [EAI]) φ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Im ersten Fall nennt man φ *orientierungstreu*, im zweiten Fall *orientierungsumkehrend*. Ist $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine C^1-Parametertransformation, so ist (Satz 15.6 in [EAI]) φ orientierungstreu genau dann, wenn $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in [a,b]$ ist, orientierungsumkehrend genau dann, wenn $\varphi'(t) < 0$ für alle $t \in [a,b]$ ist. Wir definieren das *Vorzeichen* der Parametertransformation φ durch

$$\epsilon(\varphi) = 1, \text{ falls } \varphi \text{ orientierungstreu ist,}$$
$$\epsilon(\varphi) = -1, \text{ falls } \varphi \text{ orientierungsumkehrend ist.}$$

(d) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve, $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine C^1-Parametertransformation und $g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n,\ g(\tau) = f(\varphi(\tau))$.

(i) Die Tangentialvektoren

$$g'(\tau) = \varphi'(\tau) f'(\varphi(\tau))$$

von g in τ und f in $\varphi(\tau)$ unterscheiden sich um die Zahl $\varphi'(\tau) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Im Falle $g'(\tau) \neq 0$ (äquivalent $f'(\varphi(\tau)) \neq 0$) gilt

$$\frac{g'(\tau)}{\|g'(\tau)\|} = \frac{\varphi'(\tau)}{|\varphi'(\tau)|}\ \frac{f'(\varphi(\tau))}{\|f'(\varphi(\tau))\|} = \epsilon(\varphi)\frac{f'(\varphi(\tau))}{\|f'(\varphi(\tau))\|}.$$

(ii) Die Länge einer stetig differenzierbaren Kurve ändert sich durch Umparamerisieren mit einer C^1-Parametertransformation nicht

$$\begin{aligned} L(g) &= \int_\alpha^\beta \|g'(\tau)\| dt = \int_\alpha^\beta \|f'(\varphi(\tau))\| \epsilon(\varphi)\varphi'(\tau) d\tau \\ &= \epsilon(\varphi) \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \|f'(t)\| dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt = L(f). \end{aligned}$$

Dabei haben wir Teil (c) benutzt und die Substitutionsregel (Satz 17.10 in [EAI]).

(iii) Seien $f_i : [a_i,b_i] \to \mathbb{R}^n$ $(i=1,2)$ reguläre Kurven, $t_i \in [a_i,b_i]$ Parameter mit $f_1(t_1) = f_2(t_2)$ und $\varphi_i : [\alpha_i,\beta_i] \to [a_i,b_i]$ $(i=1,2)$ C^1-Parametertransformationen. Setze $\tau_i = \varphi_i^{-1}(t_i)$ und

$$g_i = f_i \circ \varphi_i : [\alpha_i,\beta_i] \to \mathbb{R}^n$$

für $i = 1, 2$. Dann ist $g_1(\tau_1) = g_2(\tau_2)$ und für die Schnittwinkel θ von f_1, f_2 in t_1, t_2 und θ' von g_1, g_2 in τ_1, τ_2 gilt nach (i)

$$\cos\theta' = \frac{\langle g'(\tau_1), g'(\tau_2)\rangle}{\|g'(\tau_1)\| \, \|g'(\tau_2)\|} = \epsilon(\varphi_1)\epsilon(\varphi_2)\frac{\langle f'(t_1),\ f'(t_2)\rangle}{\|f'(t_1)\| \, \|f'(t_2)\|} = \epsilon(\varphi_1)\epsilon(\varphi_2)\cos\theta.$$

Also ist $\theta = \theta'$, falls φ_1 und φ_2 beide orientierungstreu oder orientierungsumkehrend sind, und $\theta' = \theta - \pi$ sonst.

Literatur

[EAI] Eschmeier, J., Analysis I, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2013.