

5 Partielle Ableitungen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ eine Funktion. Man nennt die Menge

$$G(f) = \{(x, f(x)); x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

den *Graphen* von f . Die Mengen

$$N_f(c) = \{x \in U; f(x) = c\} \quad (c \in \mathbb{R})$$

heißen die *Niveaumengen* von f .

Für $i = 1, \dots, n$ bezeichne $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ den i -ten kanonischen Basisvektor des $\mathbb{R}^n$.

Definition 5.1. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x \in U$ ein Punkt in U . Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in x *partiell differenzierbar bezüglich der i -ten Koordinate*, falls der Limes

$$D_i f(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h} \in \mathbb{R}$$

existiert. Man nennt $D_i f(x)$ die i -te partielle Ableitung von f in x . Statt $D_i f(x)$ schreibt man auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ oder $\partial_i f(x)$.

Bemerkung 5.2. In der Situation von Definition 5.1 gilt:

- (a) Die Menge $\{h \in \mathbb{R}; x + h e_i \in U\}$ ist eine offene Umgebung von 0 in $\mathbb{R}$ (Satz 2.23).
- (b) Die Funktion f ist partiell differenzierbar in x bezüglich der i -ten Koordinate genau dann, wenn die Funktion $f_i : \{t \in \mathbb{R}; (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n) \in U\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$t \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

differenzierbar in x_i ist (vgl. Bemerkung 14.2 in [EAI]). In diesem Fall gilt

$$f'_i(x_i) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f_i(x_i + h) - f_i(x_i)}{h} = D_i f(x).$$

- (c) Teil (b) impliziert, dass für die i -ten partiellen Ableitungen dieselben Rechenregeln (Summen-, Produkt-, Quotientenregel) gelten wie für Ableitungen von Funktionen einer reellen Variablen (Satz 14.8 in [EAI]).

Definition 5.3. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Man nennt f

- (a) *partiell differenzierbar*, wenn $D_i f(x)$ in jedem Punkt $x \in U$ für alle $i = 1, \dots, n$ existiert,

(b) *stetig partiell differenzierbar*, falls zusätzlich die Funktionen

$$D_i f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto D_i f(x) \quad (i = 1, \dots, n)$$

stetig sind.

Statt $D_i f$ schreibt man auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ oder $\partial_i f$.

Beispiele 5.4. (a) Die Funktion $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $r(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ ist stetig und $r|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ ist partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{r(x)} \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Aus Beispiel 2.13 (b) folgt die Stetigkeit von r . Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $i \in \{1, \dots, n\}$. Da die Wurzelfunktion

$$\sqrt{\cdot} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

differenzierbar ist, ist nach der Kettenregel (Satz 14.10 in [EAI]) auch die Funktion

$$\begin{aligned} r_i : \{t \in \mathbb{R}; x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + t^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 > 0\} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ t &\mapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + t^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2} \end{aligned}$$

differenzierbar in $t = x_i$ mit

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = r'_i(x_i) = \frac{1}{2} \frac{2x_i}{r(x)} = \frac{x_i}{r(x)}.$$

(b) Sei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Die Funktion

$$f \circ r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(r(x)) = f(\|x\|)$$

ist partiell differenzierbar nach der 1-dimensionalen Kettenregel mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f \circ r)}{\partial x_i}(x) &= (f \circ r)'_i(x_i) = (f \circ r_i)'(x_i) = f'(r_i(x_i))r'_i(x_i) \\ &= f'(r(x)) \frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = f'(r(x)) \frac{x_i}{r(x)} = f'(\|x\|) \frac{x_i}{\|x\|} \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, n$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Hierbei haben wir das Ergebnis aus Teil (a) benutzt.

(c) Partiiell differenzierbare Funktionen brauchen nicht stetig zu sein. Sei etwa $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{\|x\|^{2n}} \text{ für } x \neq 0, \quad F(0) = 0.$$

Auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist F partiell differenzierbar nach (b) und der Produktregel und für $i = 1, \dots, n$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial(x_1 \cdots x_n)}{\partial x_i} \frac{1}{r(x)^{2n}} + (x_1 \cdots x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r(x)^{2n}} \right) \\ &= \frac{x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n}{r(x)^{2n}} - 2n \frac{x_1 \cdots x_{i-1} x_i^2 x_{i+1} \cdots x_n}{r(x)^{2n+2}}. \end{aligned}$$

Die Funktion F ist auch in 0 partiell differenzierbar mit

$$\frac{F(0 + he_i) - F(0)}{h} = \frac{0}{h} \xrightarrow{(h \rightarrow 0)} 0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(0) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Aber F ist nicht stetig in $x = 0$, denn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F\left(\left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}\right)\right) = \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^n}{\left(n \cdot \frac{1}{k^2}\right)^n} = \left(\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} \infty.$$

Wir werden später sehen, dass aus der stetigen partiellen Differenzierbarkeit einer Funktion die Stetigkeit der Funktion folgt.

Definition 5.5. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$.

Für $x \in U$ nennt man den Zeilenvektor

$$\text{grad } f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n$$

den *Gradienten* von f in x .

Beispiele 5.6. (a) Für $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $r(x) = \|x\|$ ist $\text{grad } r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (Beispiel 5.4(a)).

(b) Sei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = f(\|x\|)$. Dann ist $\text{grad } F(x) = f'(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(c) Seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann ist $fg : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar mit

$$\text{grad } (fg) = g \text{ grad } f + f \text{ grad } g,$$

denn aus der Produktregel folgt für $i = 1, \dots, n$ auf U

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Statt $\text{grad } f$ benutzt man oft auch die Schreibweise ∇f (gelesen: Nabla f).

Definition 5.7. (Vektorfelder) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(a) Ein *Vektorfeld* auf U ist eine Abbildung $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.

(b) Ein Vektorfeld $v = (v_1, \dots, v_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt (stetig) *partiell differenzierbar*, falls alle Koordinatenfunktionen $v_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ (stetig) partiell differenzierbar sind. In diesem Fall nennt man

$$\text{div } v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}$$

die *Divergenz des Vektorfeldes* v .

Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so ist $\text{grad } f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld.

Lemma 5.8. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar. Dann ist auch $fv : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar mit

$$\text{div}(fv) = \langle \text{grad } f, v \rangle + f \text{div } v.$$

Beweis. Sei $v = (v_1, \dots, v_n)$. Für $1 \leq i \leq n$ ist fv_i partiell differenzierbar mit $\frac{\partial}{\partial x_i}(fv_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}v_i + f\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$. Durch Aufsummieren erhält man

$$\text{div}(fv) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(fv_i)}{\partial x_i} = \langle \text{grad } f, v \rangle + f \text{div } v. \quad \square$$

Beispiel 5.9. Das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

ist nach Beispiel 5.6 (b) und Lemma 5.8 partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) &= \left\langle \text{grad} \left(\frac{1}{\|x\|} \right), x \right\rangle + \frac{1}{\|x\|} \text{div}(x) \\ &= \left\langle -\frac{1}{\|x\|^2} \frac{x}{\|x\|}, x \right\rangle + \frac{n}{\|x\|} = \frac{n-1}{\|x\|} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Für $k \in \mathbb{N}^*$ und $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ schreiben wir $D_{i_k} D_{i_{k-1}} \dots D_{i_2} D_{i_1} f$ für die iterierte partielle Ableitung

$$D_{i_k}(\dots(D_{i_2}(D_{i_1}f))\dots),$$

falls diese existiert, also falls die Funktionen f nach x_{i_1} , $D_{i_1}f$ nach x_{i_2} , $D_{i_2}(D_{i_1}f)$ nach $x_{i_3}, \dots$, $D_{i_{k-1}}(\dots(D_{i_2}(D_{i_1}f))\dots)$ nach x_{i_k} partiell differenzierbar sind. Bei festem $k \in \mathbb{N}^*$ heißen die Funktionen

$$D_{i_k} \dots D_{i_1} f \quad (i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\})$$

die partiellen Ableitungen der Ordnung k von f . Im Allgemeinen ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen wichtig.

Beispiel 5.10. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{für } (x_1, x_2) \neq 0, \quad f(0, 0) = 0$$

ist nach den Beispielen 5.4 (b) und 5.6 (c) auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar. Mit $p(x) = x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) = x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3$ folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial p}{\partial x_i}(x) \frac{1}{\|x\|^2} - 2 p(x) \frac{x_i}{\|x\|^4} \quad (i = 1, 2).$$

Im Punkt $x = 0$ existieren die partiellen Ableitungen 1. Ordnung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0, x) - f(0, 0)}{x} = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0).$$

Da für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{(D_1 f)(x, 0)}{x} &= 0, & \frac{(D_1 f)(0, x)}{x} &= -\frac{x^3}{x^3} = -1, \\ \frac{(D_2 f)(x, 0)}{x} &= \frac{x^3}{x^3} = 1, & \frac{(D_2 f)(0, x)}{x} &= 0, \end{aligned}$$

existieren die partiellen Ableitungen 2. Ordnung in $x = 0$

$$D_2 D_1 f(0, 0) = -1 \neq 1 = D_1 D_2 f(0, 0),$$

aber sind verschieden.

Satz 5.11. (Satz von Schwarz) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq i, j \leq n$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion so, dass die partiellen Ableitungen $D_j D_i f$, $D_i D_j f$ auf U existieren und in einem Punkt $a \in U$ stetig sind. Dann ist $D_j D_i f(a) = D_i D_j f(a)$.

Beweis. Für $i = j$ ist nichts zu zeigen. Sei also $i \neq j$. Wähle $\delta > 0$ so klein, dass

$$\{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\|_\infty < \delta\} \subset U$$

und setze $V = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2; \|(s, t)\|_\infty < \delta\}$. Wir definieren $f_{ij} : V \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_{ij}(s, t) = f(a + se_i + te_j) - f(a + se_i) - f(a + te_j) + f(a).$$

Bildet man entsprechend f_{ji} , indem man die Rollen von i und j vertauscht, so gilt

$$f_{ij}(s, t) = f_{ji}(t, s)$$

für $(s, t) \in V$. Wir fixieren einen Punkt $(s, t) \in V$ mit $s \neq 0 \neq t$. Der 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 15.4 in [EAI]) angewendet auf die differenzierbare Funktion

$$g : [-|s|, |s|] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(u) = f(a + ue_i + te_j) - f(a + ue_i)$$

liefert ein $\xi = \xi_{s,t} \in]-|s|, |s|[$ mit

$$f_{ij}(s, t) = g(s) - g(0) = g'(\xi)s = s(D_i f(a + \xi e_i + te_j) - D_i f(a + \xi e_i)).$$

Der 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung angewendet auf die differenzierbare Funktion

$$h = [-|t|, |t|] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(v) = D_i f(a + \xi e_i + ve_j)$$

liefert ein $\eta = \eta_{s,t} \in]-|t|, |t|[$ mit

$$f_{ij}(s, t) = s(h(t) - h(0)) = sth'(\eta) = stD_j D_i f(a + \xi e_i + \eta e_j).$$

Da für jede Folge von Paaren $(s_n, t_n) \in V$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ und $s_n \neq 0 \neq t_n$ für alle n auch die zugehörigen Folgen $(\xi_{s_n, t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\eta_{s_n, t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergieren, folgt aus der vorausgesetzten Stetigkeit von $D_j D_i f$ im Punkt a , dass

$$D_j D_i f(a) = \lim_{(s,t)} D_j D_i f(a + \xi_{s,t} e_i + \eta_{s,t} e_j) = \lim_{(s,t)} \frac{f_{ij}(s, t)}{st} = \lim_{(s,t)} \frac{f_{ji}(t, s)}{ts} = D_i D_j f(a),$$

wobei der Limes für $V \ni (s, t) \rightarrow 0$ mit $s \neq 0 \neq t$ gebildet wird. Dabei folgt die letzte Identität, indem man im obigen Beweis überall die Rollen von i und j und s und t vertauscht. $\square$

Definition 5.12. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $k \in \mathbb{N}^*$. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt k -mal *partiell differenzierbar* (bzw. *stetig partiell differenzierbar*), falls alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung $\leq k$ existieren (bzw. existieren und stetig sind). Wir schreiben

$$\begin{aligned} C^k(U) &= \{f : U \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ ist } k\text{-mal stetig partiell differenzierbar}\}, \\ C^k(U, \mathbb{R}^m) &= \{f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m; f_i \in C^k(U) \text{ für } i = 1, \dots, m\}, \\ C^0(U, \mathbb{R}^m) &= C(U, \mathbb{R}^m) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m; f \text{ ist stetig}\}. \end{aligned}$$

Korollar 5.13. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal stetig partiell differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ mit $2 \leq r \leq k$ und jede Permutation $\pi : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$

$$D_{i_k} \dots D_{i_1} f = D_{i_{\pi(k)}} \dots D_{i_{\pi(1)}} f.$$

Beweis. Jede Permutation $\pi : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$ lässt sich darstellen als Komposition endlich vieler benachbarter Transpositionen. $\square$

Man schreibt auch

$$\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = D_{i_k} \dots D_{i_1} f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = D_i D_i f, \dots$$

Beispiel 5.14. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ partiell differenzierbar. Dann heißt

$$\text{rot } v = (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2, \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3, \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

die *Rotation des Vektorfeldes* v .

Korollar 5.15. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt $\text{rot grad } f = 0$.

Beweis. Da f eine 2-mal stetig partiell differenzierbare Funktion ist, folgt mit dem Satz von Schwarz (Satz 5.11), dass

$$\text{rot grad } f = (\partial_2 \partial_3 f - \partial_3 \partial_2 f, \partial_3 \partial_1 f - \partial_1 \partial_3 f, \partial_1 \partial_2 f - \partial_2 \partial_1 f) = 0. \quad \square$$

Definition 5.16. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(U)$.

(a) Man definiert

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f \quad (\text{gelesen: Laplace } f).$$

(b) Die Gleichung

$$\Delta f = 0 \quad (f \in C^2(U))$$

heißt *Potentialgleichung*. Ihre Lösungen nennt man *harmonische Funktionen* auf U .

Beispiele 5.17. (a) Sei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion und

$$F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = f(\|x\|).$$

Dann ist $F \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ mit

$$\Delta F(x) = f''(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|} f'(\|x\|)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Denn aus Beispiel 5.4(b) und der Produktregel folgt, dass die partiellen Ableitungen

$$(\partial_i F)(x) = f'(\|x\|) \frac{x_i}{\|x\|} \quad (1 \leq i \leq n)$$

stetig partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sind mit

$$\begin{aligned} \Delta F(x) &= \operatorname{div} \operatorname{grad} F(x) = \operatorname{div} \left(f'(\|x\|) \frac{x}{\|x\|} \right) \\ &= \left\langle \operatorname{grad} f'(\|x\|), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle + f'(\|x\|) \operatorname{div} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \\ &= \left\langle f''(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle + f'(\|x\|) \frac{n-1}{\|x\|} \\ &= f''(\|x\|) + \frac{n-1}{\|x\|} f'(\|x\|) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dabei haben wir nacheinander Lemma 5.8 sowie die Beispiele 5.6(b) und 5.9 benutzt.

Insbesondere sind die Funktionen

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{1}{\|x\|^{n-2}}, \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log \|x\|$$

harmonisch.

(b) (*Schwingungsgleichung*) Sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Funktion

$$F : (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, t) = \frac{\cos(\|x\| - ct)}{\|x\|}$$

ist eine 2-mal stetig partiell differenzierbare Lösung der *Schwingungsgleichung*

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) F \equiv 0.$$

Da für festes $t \in \mathbb{R}$ die durch $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(r) = \frac{\cos(r-ct)}{r}$ definierte Funktion 2-mal stetig differenzierbar ist, folgt mit Teil (a)

$$\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F\right)(x, t) = f''(\|x\|) + \frac{2}{\|x\|} f'(\|x\|)$$

für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Es ist

$$\begin{aligned} f'(r) &= \frac{-\sin(r-ct)}{r} - \frac{\cos(r-ct)}{r^2}, \\ f''(r) &= \frac{-\cos(r-ct)}{r} + 2 \frac{\sin(r-ct)}{r^2} + 2 \frac{\cos(r-ct)}{r^3} \end{aligned}$$

und daher

$$\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F\right)(x, t) = -\frac{\cos(\|x\| - ct)}{\|x\|}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Wegen

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} F(x, t) = c^2 \frac{\cos(\|x\| - ct)}{\|x\|} \quad (x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, t \in \mathbb{R})$$

folgt die Behauptung.

Literatur

[EAI] Eschmeier, J., Analysis I, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2013.