7 Die Taylorsche Formel

Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ werden wir im Folgenden die abkürzenden Schreibweisen

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \ \alpha! = (\alpha_1!)(\alpha_2!)\cdots(\alpha_n!), \ x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\ x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

benutzen. Für $f \in C^{|\alpha|}(U) \quad (U \subset \mathbb{R}^n$ offen) definiert man

$$D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

mit $D_i^{\alpha_i} = D_i \ldots D_i$ α_i-mal angewendet.

Satz 7.1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f \in C^k(U)$. Sind $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0,1]$, so ist die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}, \ g(t) = f(x + t\xi)$ k-mal stetig differenzierbar und für alle $t \in [0,1]$ gilt*

$$g^{(k)}(t) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = k}} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha f)\ (x + t\xi)\xi^\alpha.$$

Beweis. Nach der Kettenregel (Korollar 6.10) ist $g \in C^k[0,1]$. Man beachte, dass $\{t \in \mathbb{R};\ x + t\xi \in U\} \subset \mathbb{R}$ als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion offen ist.

Im ersten Beweisschritt zeigen wir durch Induktion nach k, dass für alle $k \geq 1$ und $f \in C^k(U)$ die k-te Ableitung von g in jedem Punkt $t \in [0,1]$ gegeben ist durch

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} D_{i_k} \ldots D_{i_1} f(x + t\xi)\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}.$$

Für $k = 1$ folgt die behauptete Formel direkt aus Korollar 6.9

$$g^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x + t\xi) \frac{d}{dt}(x_i + t\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x + t\xi)\xi_i.$$

Ist die Behauptung gezeigt für $f \in C^{k-1}(U),\ k \geq 2$, so folgt wieder mit der Kettenregel (Korollar 6.9) zusammen mit der Induktionsvoraussetzung, dass

$$g^{(k)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i_1, \ldots, i_{k-1} = 1}^{n} D_{i_{k-1}} \ldots D_{i_1} f(x + t\xi)\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_{k-1}} \right) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} D_{i_k} \ldots D_{i_1} f(x + t\xi)\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}$$

für alle $t \in [0,1]$.

Im zweiten Schritt zeigen wir mit einem kombinatorischen Argument, dass die gerade bewiesene Summendarstellung für $g^{(k)}(t)$ mit der im Satz behaupteten Darstellung übereinstimmt. Dazu bezeichnen wir für $(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$ und jedes $\nu = 1, \ldots, n$ mit α_ν die Anzahl aller $j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $i_j = \nu$ und setzen $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Offensichtlich ist $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ein Tupel mit $|\alpha| = k$, und der zum Indextupel $(i_1, \ldots, i_k)$ gehörige Summand in der oben bewiesenen Formel für $g^{(k)}(t)$ hat die Form

$$D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} f(x + t\xi)\xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n} = D^\alpha f(x + t\xi)\xi^\alpha.$$

Man beachte dabei, dass es für $f \in C^k(U)$ nach dem Satz von Schwarz (Korollar 5.13) nicht auf die Reihenfolge ankommt, in der die partiellen Ableitungen gebildet werden. Bleibt noch zu zählen, wie viele Indextupel $(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$ zu gegebenem $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = k$ existieren, in denen jede der Zahlen $i \in \{1, \ldots, n\}$ genau α_i-mal vorkommt. Es gibt $\binom{k}{\alpha_1}$ Möglichkeiten, die α_1 Plätze für die Zahl 1 auszusuchen. Zu jeder dieser Möglichkeiten gibt es $\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}$ Möglichkeiten, die α_2 Plätze für die Zahl 2 auszusuchen und so weiter.

Auf diese Weise sieht man, dass es insgesamt

$$\binom{k}{\alpha_1}\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}\binom{k-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_3}\cdots\binom{k-\alpha_1-\ldots-\alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{k!}{\alpha_1!(k-\alpha_1)!}\,\frac{(k-\alpha_1)!}{\alpha_2!(k-\alpha_1-\alpha_2)!}\,\frac{(k-\alpha_1-\alpha_2)!}{\alpha_3!(k-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)!}\cdots\frac{(k-\alpha_1-\ldots-\alpha_{n-2})!}{(\alpha_{n-1})!\alpha_n!} \\ &= \frac{k!}{\alpha!} \end{aligned}$$

Möglichkeiten gibt. Damit folgt die Behauptung. □

Als Anwendung von Satz 7.1 und des Satzes über die Taylorentwicklung von Funktionen einer reellen Variablen (Satz 20.1 in [EAI]) erhält man die Taylorsche Formel für Funktionen von n Veränderlichen.

Satz 7.2. *(Taylorsche Formel) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0,1]$. Ist $f \in C^{k+1}(U)$, so gibt es ein $\theta \in]0,1[$ mit*

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\le k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!}\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(x+\theta\xi)}{\alpha!}\xi^\alpha.$$

Beweis. Da durch $g : [0,1] \to \mathbb{R},\ g(t) = f(x+t\xi)$ eine Funktion in $C^{k+1}[0,1]$ definiert wird, gibt es nach der 1-dimensionalen Taylorschen Formel (Satz 20.1 in [EAI]) ein $\theta \in]0,1[$ mit

$$g(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{g^{(j)}(0)}{j!}1^j + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}1^{k+1}.$$

Mit Satz 7.1 folgt, dass

$$f(x+\xi) = g(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|=j}} \frac{j!}{\alpha!} D^\alpha f(x)\xi^\alpha + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|=k+1}} \frac{(k+1)!}{\alpha!} D^\alpha f(x+\theta\xi)\xi^\alpha.$$

Also gilt die im Satz behauptete Formel. □

Die in Satz 7.2 hergeleitete Darstellung einer Funktion $f \in C^{k+1}(U)$ nennt man die *Taylorentwicklung von f in x mit Restglied der Ordnung* $(k+1)$. Zur approximativen Berechnung von f in der Nähe von x ist die folgende Restgliedabschätzung nützlich.

Korollar 7.3. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $k \in \mathbb{N}$ und $f \in C^k(U)$. Für die durch*

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \varphi(\xi) \quad (\xi \in U - x)$$

definierte Funktion $\varphi : U - x \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^k} = 0.$$

Beweis. Für $k = 0$ folgt die Behauptung direkt aus der Stetigkeit von f. Sei also $k \geq 1$. Da U offen ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset U$. Für $\xi \in B_\delta(0)$ existiert nach Satz 7.2 ein $\theta = \theta_\xi \in]0,1[$ mit

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{|\alpha| = k} \frac{D^\alpha f(x+\theta\xi) - D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha.$$

Also gilt für $\xi \neq 0$

$$\left| \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^k} \right| \le \sum_{|\alpha|=k} \frac{|D^\alpha f(x+\theta\xi) - D^\alpha f(x)|}{\alpha!} \frac{|\xi_1|^{\alpha_1}}{\|\xi\|^{\alpha_1}} \cdots \frac{|\xi_n|^{\alpha_n}}{\|\xi\|^{\alpha_n}} \le \sum_{|\alpha|=k} \frac{|D^\alpha f(x+\theta\xi) - D^\alpha f(x)|}{\alpha!} \overset{(\xi \to 0)}{\longrightarrow} 0.$$

Benutzt haben wir, dass alle Ableitungen von f der Ordnung k noch stetig sind im Punkt x. □

Abkürzend für die in Korollar 7.3 formulierte Eigenschaft von Funktionen $f \in C^k(U)$ schreibt man oft

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \mathrm{o}(\|\xi\|^k) \quad (x \in U - x).$$

Die Funktionen

$$p_j(\xi) = \sum_{|\alpha| = j} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha \quad (j = 0, \ldots, k)$$

sind bei festem $x \in U$ *homogene Polynome vom Grade* j in ξ (das heißt Polynomfunktionen mit $p_j(t\xi) = t^j p_j(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$). Definitionsgemäß gilt

$$f(x+\xi) = \sum_{j=0}^{k} p_j(\xi) + \mathrm{o}(\|\xi\|^k) \quad (x \in U - x).$$

Für $j = 0, 1, 2$ erhält man $p_0(\xi) \equiv f(x)$,

$$\begin{aligned}
p_1(\xi) &= \sum_{i=1}^{n} D_i f(x) \xi_i = \langle \text{grad } f(x), \xi \rangle, \\
p_2(\xi) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} D_i^2 f(x) \xi_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} D_i D_j f(x) \xi_i \xi_j \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} D_i^2 f(x) \xi_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} D_i D_j f(x) \xi_i \xi_j \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} D_i D_j f(x) \xi_j \right) \xi_i \\
&= \frac{1}{2} \langle A\xi, \xi \rangle
\end{aligned}$$

mit $A = (D_iD_jf(x))_{1\le i,j\le n} \in M(n\times n,\mathbb{R})$. Hierbei haben wir bei der Berechnung von $p_2(\xi)$ benutzt, dass man dem Satz von Schwarz (Satz 5.11) die partiellen Ableitungen 2. Ordnung einer C^2-Funktion unabhängig von der Reihenfolge sind, in der sie gebildet werden.

Definition 7.4. (Hesse-Matrix) Seien $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $x\in U$ und $f\in C^2(U)$. Die Matrix

$$\mathrm{Hess}f(x) = (D_iD_jf(x))_{1\le i,j\le n} \in M(n\times n,\mathbb{R})$$

heißt die *Hesse-Matrix* von f in x.

Damit erhält Korollar 7.3 im Spezialfall $k=2$ die folgende Gestalt.

Korollar 7.5. *Seien $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $x\in U$ und $f\in C^2(U)$. Dann gilt*

$$f(x+\xi) = f(x) + \langle \mathrm{grad}\ f(x),\xi\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathrm{Hess}f(x)\xi,\xi\rangle + \mathrm{o}(\|\xi\|^2)$$

für $\xi\in U-x$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Korollar 7.3 mit $k=2$ und den anschließenden Bemerkungen. □

Wie in der Analysis I kann man auch die Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher benutzen, um lokale Extrema von reellwertigen Funktionen zu bestimmen.

Definition 7.6. (Lokale Extrema) Seien $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $x\in U$ und $f:U\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Definitionsgemäß besitzt die Funktion f ein *lokales Maximum* (*Minimum*) in x_0, falls eine Umgebung V von x existiert mit $f(y)\le f(x)$ ($f(y)\ge f(x)$) für alle $y\in V$. Kann man V so wählen, dass sogar $f(y)<f(x)$ ($f(y)>f(x)$) für alle $y\in V\setminus\{x\}$ gilt, so nennt man x ein *isoliertes* oder *striktes lokales Maximum* (*Minimum*) für f. Man sagt, dass f ein (*isoliertes*) *lokales Extremum* in x_0 besitzt, wenn f in x_0 ein (isoliertes) lokales Maximum oder Minimum besitzt.

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbar in einem inneren Punkt $x\in]a,b[$ des Intervalls $[a,b]$ und besitzt f in x ein lokales Extremum, so ist $f'(x)=0$ (Satz 15.2 in [EAI]). Dieser Satz lässt sich sehr einfach verallgemeinern auf Funktionen von n Veränderlichen.

Satz 7.7. *Seien $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $x\in U$ und $f:U\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Ist f partiell differenzierbar in x und besitzt f ein lokales Extremum in x, so ist* grad $f(x)=0$.

Beweis. Da U offen ist, gibt es ein $\delta>0$ mit $B_\delta(x)\subset U$. Nach Voraussetzung sind die Funktionen

$$g_i:]-\delta,\delta[\to\mathbb{R},\ g_i(t)=f(x+te_i)\quad(i=1,\dots,n)$$

differenzierbar in $t=0$ und besitzen ein lokales Extremum im Punkt $t=0$. Nach dem oben zitierten Satz aus der Analysis I (Satz 15.2 in [EAI]) gilt

$$D_if(x) = g_i'(0) = 0\quad(i=1,\dots,n).$$

Also ist grad $f(x)=0$. □

Die in Satz 7.7 formulierte notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums ist schon im Falle $n = 1$ nicht hinreichend. Wir suchen nach hinreichenden Bedingungen.

Definition 7.8. Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix (das heißt, es sei $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$). Man nennt A

(a) *positiv definit*, falls $\langle Ax, x\rangle > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist,

(b) *positiv semidefinit*, falls $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist,

(c) *negativ definit* (bzw. *negativ semidefinit*), falls $-A$ positiv definit (bzw. positiv semidefinit) ist,

(d) *indefinit*, falls $x, y \in \mathbb{R}^n$ existieren mit $\langle Ax, x\rangle < 0 < \langle Ay, y\rangle$.

Bemerkung 7.9. In der Linearen Algebra zeigt man, dass es zu jeder symmerischen Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Orthonormalbasis $(v_i)_{i=1}^n$ des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A gibt, das heißt, es gibt Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ und reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$Av_i = \lambda_i v_i \ (i = 1, \ldots, n) \text{ und } \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} \ (i, j = 1, \ldots, n),$$

wobei $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ ist. Insbesondere gilt dann für $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$

$$\left\langle A\left(\sum_{i=1}^n t_i v_i\right), \left(\sum_{i=1}^n t_i v_i\right)\right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i^2.$$

Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind genau die Eigenwerte der Matrix A

$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = \{\lambda \in \mathbb{R};\ \text{es gibt ein } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ mit } Ax = \lambda x\}$$

und die symmetrische Matrix A ist

- positiv (bzw. negativ) definit genau dann, wenn $\lambda_i > 0$ (bzw. $\lambda_i < 0$) für alle $i = 1, \ldots, n$ ist,
- positiv (bzw. negativ) semidefinit genau dann, wenn $\lambda_i \geq 0$ (bzw. $\lambda_i \leq 0$) für alle $i = 1, \ldots, n$ ist,
- indefinit genau dann, wenn Indizes $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_i > 0$ und $\lambda_j < 0$ existieren.

In der Linearen Algebra beweist man die folgende nützliche Charakterisierung positiv definiter Matrizen.

Satz (Hurwitz) Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann ist A positiv definit genau dann, wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

ist für jedes $k = 1, \ldots, n$.

Bemerkung 7.10. Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix und $S = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\}$. Die stetige Funktion

$$S \to \mathbb{R},\ x \mapsto \langle Ax, x\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j x_i$$

nimmt auf dem Kompaktum S ihr Minimum an (Korollar 3.11). Ist A positiv definit, so ist

$$c = \min_{x \in S} \langle Ax, x\rangle > 0,$$

und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\langle Ax, x\rangle = \left\langle A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \|x\|^2 \geq c\|x\|^2.$$

Mit Hilfe der partiellen Ableitungen 2. Ordnung kann man ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Extremums formulieren.

Satz 7.11. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ und $f \in C^2(U)$ eine Funktion mit*

$$\operatorname{grad} f(x) = 0.$$

(a) Ist $\mathrm{Hess} f(x)$ *positiv definit, so hat f in x ein isoliertes lokales Minimum.*

(b) Ist $\mathrm{Hess} f(x)$ *negativ definit, so hat f in x ein isoliertes lokales Maximum.*

(c) Ist $\mathrm{Hess} f(x)$ *indefinit, so hat f in x kein lokales Extremum.*

Beweis. Sei $A = \mathrm{Hess} f(x)$. Nach Korollar 7.5 gilt

$$f(x+\xi) = f(x) + \frac{1}{2}\langle A\xi, \xi\rangle + \varphi(\xi) \text{ mit } \lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2} = 0.$$

Ist A positiv definit, so ist $c = \min\{\langle A\xi, \xi\rangle;\ \|\xi\| = 1\} > 0$. Zu $\frac{c}{4} > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\left|\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2}\right| < \frac{c}{4}$$

für alle $\xi \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$. Mit Bemerkung 7.10 erhält man, dass

$$f(x+\xi) \geq f(x) + \left(\frac{c}{2} - \frac{c}{4}\right)\|\xi\|^2 > f(x)$$

für alle $\xi \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$. Also besitzt f ein isoliertes lokales Minimum im Punkt x.
Ist $\mathrm{Hess} f(x)$ negativ definit, so besitzt die Funktion $-f$ in x nach Teil (a) ein isoliertes lokales Minimum. Also hat f ein isoliertes lokales Maximum in x.
Ist A indefinit, so gibt es Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ so, dass

$$\langle Au, u\rangle > 0 > \langle Av, v\rangle$$

ist. Sei $c = \langle Au, u\rangle$ und $d = \langle Av, v\rangle$. Da man u und v ersetzen kann durch $\frac{u}{\|u\|}$ und $\frac{v}{\|v\|}$, dürfen wir annehmen, dass $\|u\| = \|v\| = 1$ ist. Ist $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ist $|t|$ klein genug, so gilt

$$f(x + tu) = f(x) + \frac{1}{2}\langle Atu, tu\rangle + \varphi(tu) = f(x) + \left(\frac{c}{2} + \frac{\varphi(tu)}{\|tu\|^2}\right) t^2 > f(x)$$

und

$$f(x + tv) = f(x) + \left(\frac{d}{2} + \frac{\varphi(tv)}{\|tv\|^2}\right) t^2 < f(x).$$

Also enthält jede Umgebung V von x Punkte x_1, x_2 mit $f(x_1) > f(x) > f(x_2)$. Folglich besitzt f kein lokales Extremum im Punkt x. $\square$

Bemerkung 7.12. Eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist

(i) positiv definit genau dann, wenn $ad - b^2 > 0$ und $a > 0$ ist,

(ii) negativ definit genau dann, wenn $ad - b^2 > 0$ und $a < 0$ ist,

(iii) indefinit genau dann, wenn $ad - b^2 < 0$ ist.

Dabei folgen (i) und (ii) direkt aus dem Satz von Hurwitz. Zum Beweis von (iii) beachte man, dass es eine orthogonale Matrix $U \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ gibt so, dass

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Diagonalgestalt hat. Wegen $\det(A) = \det(U^{-1}AU) = \lambda_1\lambda_2$ folgt (iii) aus Bemerkung 7.9.

Beispiele 7.13. (a) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = (x + y)^3 - 12xy$$

ist zweimal stetig partiell differenzierbar mit

$$\text{grad } f(x, y) = (3(x + y)^2 - 12y,\ 3(x + y)^2 - 12x).$$

Es ist grad $f(x, y) = 0$ genau dann, wenn $4y = (x + y)^2 = 4x$ bzw. wenn $x = y$ und $x(x - 1) = 0$ ist. Also sind $u = (0, 0)$ und $v = (1, 1)$ die einzigen Nullstellen von grad f. Wegen

$$\text{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} 6(x + y) & 6(x + y) - 12 \\ 6(x + y) - 12 & 6(x + y) \end{pmatrix}$$

ist

$$\text{Hess} f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

indefinit und

$$\mathrm{Hess}f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

positiv definit. Nach Satz 7.7 und Satz 7.11 besitzt f genau ein lokales Extremum. Dieses ist ein isoliertes lokales Minimum im Punkt $(1,1)$.

(b) Im Falle, dass die Hesse-Matrix nur positiv (oder negativ) semidefinit ist, kann man keine Aussage über das Vorliegen lokaler Extrema machen. Für die durch

$$f_1(x,y) = x^2 + y^4,\ f_2(x,y) = x^2,\ f_3(x,y) = x^2 + y^3$$

definierten Funktionen auf $\mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{grad}\ f_k(0,0) = (0,0),\ \mathrm{Hess}f_k(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für $k = 1,2,3$. Aber im Punkt $(0,0)$ besitzt f_1 ein isoliertes lokales Minimum, f_2 hat ein lokales, aber nicht isoliertes Minimum in $(0,0)$ und f_3 besitzt kein lokales Extremum in $(0,0)$.

Literatur

[EAI] Eschmeier, J., Analysis I, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2013.