8 Implizite Funktionen

Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und sei $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Ist $F(a, b) = 0$ in einem Punkt $(a, b) \in U_1 \times U_2$ und gibt es offene Umgebungen $V_1 \subset U_1$ von a , $V_2 \subset U_2$ von b so, dass zu jedem $x \in V_1$ genau ein $y \in V_2$ existiert mit $F(x, y) = 0$, so wird durch

$$g : V_1 \rightarrow V_2, \quad g(x) = y, \text{ falls } y \in V_2 \text{ ist mit } F(x, y) = 0$$

eine Funktion definiert mit $g(a) = b$ und

$$\{(x, g(x)); x \in V_1\} = \{(x, y) \in V_1 \times V_2; F(x, y) = 0\}.$$

Wir wollen im Folgenden Bedingungen an die Funktion F beschreiben, unter denen Mengen V_1, V_2 wie oben existieren und unter denen die durch die Gleichung $F(x, y) = 0$, $(x, y) \in V_1 \times V_2$, implizit gegebene Funktion $g : V_1 \rightarrow V_2$ sogar stetig oder differenzierbar gewählt werden kann.

Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen. Wir schreiben die Elemente von $U_1 \times U_2$ in der Form (x, y) mit $x \in U_1$, $y \in U_2$. Seien $(a, b) \in U_1 \times U_2$ und $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in (a, b) , $g : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in a so, dass $g(a) = b$ und $g(U_1) \subset U_2$ ist. Man nennt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) &= \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a, b) \right)_{i,j} \in M(m \times k, \mathbb{R}), \\ \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) &= \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b) \right)_{i,j} \in M(m \times m, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

die *partiellen Jacobi-Matrizen* von F nach x bzw. y in (a, b) und schreibt auch die Jacobi-Matrix von g in a in der Form

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a) = J_g(a) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j} \in M(m \times k, \mathbb{R}).$$

Die Jacobi-Matrix von F in (a, b) setzt sich zusammen aus den partiellen Jacobi-Matrizen

$$J_F(a, b) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(a, b), \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right) \in M(m \times (k + m), \mathbb{R}).$$

Lemma 8.1. *Seien $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $(a, b) \in U_1 \times U_2$, $g : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in a mit $g(U_1) \subset U_2$, $g(a) = b$ und*

$$F(x, g(x)) = 0$$

für alle $x \in U_1$. Dann gilt

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \frac{\partial g}{\partial x}(a).$$

Ist $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ invertierbar, so folgt

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a) = -\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a, b).$$

Beweis. Da alle Koordinatenfunktionen der Funktion $h : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{k+m}$, $h(x) = (x, g(x))$ differenzierbar in a sind, ist h differenzierbar in a mit

$$J_h(a) = \begin{pmatrix} I \\ J_g(a) \end{pmatrix},$$

wobei $I \in M(k \times k, \mathbb{R})$ die Einheitsmatrix bezeichne. Die Kettenregel (Satz 6.8 und die anschließende Bemerkung) angewendet auf die Identität

$$0 = F \circ h(x) \quad (x \in U_1)$$

impliziert, dass

$$\begin{aligned} 0 &= J_{F \circ h}(a) = J_F(h(a)) \cdot J_h(a) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(a, b), \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right) \begin{pmatrix} I \\ J_g(a) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(a, b)I + \frac{\partial F}{\partial y}(a, b)J_g(a). \end{aligned}$$

Hieraus folgen alle Behauptungen. □

Wir bezeichnen im Folgenden mit $GL(m, \mathbb{R})$ die Menge der invertierbaren Matrizen in $M(m \times m, \mathbb{R})$. Ist in der Situation von Lemma 8.1 die Matrix $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ invertierbar, so folgt die Differenzierbarkeit von g in a bereits aus der Stetigkeit.

Satz 8.2. Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Umgebungen von $a \in \mathbb{R}^k$, $b \in \mathbb{R}^m$ und sei

$$F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x, y) \mapsto F(x, y)$$

differenzierbar in (a, b) mit $F(a, b) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \in GL(m, \mathbb{R})$. Ist $g : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig in a mit $g(a) = b$, $g(U_1) \subset U_2$ und

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \text{für } x \in U_1,$$

so ist g differenzierbar in a und

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a) = -\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a, b).$$

Beweis. Es genügt, den Satz zu beweisen unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass $a = 0 = b$ ist. Sonst ersetze man F durch die Abbildung

$$\tilde{F} : (U_1 - a) \times (U_2 - b) \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x, y) \mapsto F(x + a, y + b)$$

und g durch $\tilde{g} : U_1 - a \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto g(x + a) - b$.

Seien also $a = 0 = b$. Wir schreiben

$$A = \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) \in M(m \times k, \mathbb{R}), \quad B = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \in GL(m, \mathbb{R})$$

für die partiellen Jacobi-Matrizen von F . Da F differenzierbar in $(0, 0)$ ist mit $F(0, 0) = 0$, ist

$$F(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varphi(x, y) = Ax + By + \varphi(x, y)$$

für $(x, y) \in U_1 \times U_2$ mit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{\varphi(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$0 = F(x, g(x)) = Ax + Bg(x) + \varphi(x, g(x))$$

und damit

$$g(x) = -B^{-1}Ax - B^{-1}\varphi(x, g(x))$$

für alle $x \in U_1$. Wegen $g(0) = 0$ folgt die Differenzierbarkeit von g in 0, wenn wir zeigen können, dass der Ausdruck

$$\frac{\|\varphi(x, g(x))\|}{\|x\|} = \frac{\|\varphi(x, g(x))\|}{\|(x, g(x))\|} \frac{\|(x, g(x))\|}{\|x\|}$$

gegen 0 strebt für $x \rightarrow 0$. Da der erste Faktor auf der rechten Seite für $x \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(0) \subset U_1$ und

$$\frac{\|\varphi(x, g(x))\|}{\|(x, g(x))\|} < \frac{1}{2\|B^{-1}\|} \quad \text{für } \|x\| < \delta.$$

Wegen $\|(x, g(x))\| \leq \|x\| + \|g(x)\|$ genügt es zu zeigen, dass $\|g(x)\|/\|x\|$ auf $B_\delta(0) \setminus \{0\}$ beschränkt ist.

Aber für $\|x\| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= \|B^{-1}Ax + B^{-1}\varphi(x, g(x))\| \\ &\leq \|B^{-1}A\| \|x\| + \frac{1}{2}\|(x, g(x))\| \\ &\leq \left(\|B^{-1}A\| + \frac{1}{2}\right) \|x\| + \frac{1}{2}\|g(x)\|. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\|g(x)\|/\|x\| < 2 \left(\|B^{-1}A\| + \frac{1}{2} \right)$$

für $x \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$. Damit ist gezeigt, dass g differenzierbar ist in 0 und dass $\frac{\partial g}{\partial x}(0) = -B^{-1}A$ gilt. $\square$

Bemerkung 8.3. Ist $F \in C^1(U_1 \times U_2, \mathbb{R}^m)$ und ist

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \in GL(m, \mathbb{R})$$

in einem Punkt $(a, b) \in U_1 \times U_2$, so gibt es offene Umgebungen $V_1 \subset U_1$ von a , $V_2 \subset U_2$ von b so, dass $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ invertierbar ist für alle $(x, y) \in V_1 \times V_2$. Zum Beweis beachte man, dass die partielle Funktionaldeterminante

$$\det \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) \frac{\partial F_1}{\partial y_{\pi(1)}}(x, y) \cdots \frac{\partial F_m}{\partial y_{\pi(m)}}(x, y)$$

stetig als Funktion von $(x, y) \in U_1 \times U_2$ ist. Hierbei wird die Summe über alle Permutationen der Menge $\{1, \dots, m\}$ gebildet. Folglich ist die Menge

$$\left\{ (x, y) \in U_1 \times U_2; \det \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0 \right\} \subset U_1 \times U_2$$

offen.

Zum Beweis des Hauptsatzes über die Existenz implizit definierter Funktionen benutzen wir ein Fixpunktargument.

Satz 8.4. (*Banachscher Fixpunktsatz*) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $c \in (0, 1)$ eine Konstante und $T : X \rightarrow X$ eine c -Kontraktion, das heißt eine Abbildung mit $d(T(x), T(y)) \leq cd(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Dann besitzt T einen eindeutigen Fixpunkt, das heißt es gibt genau ein Element $a \in X$ mit $T(a) = a$.

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig. Wir definieren rekursiv eine Folge $(x_k)_{k \geq 0}$ in X durch

$$x_0 = x, \quad x_{k+1} = T(x_k) \quad (k \geq 0).$$

Dann gilt für alle $k \geq 0$

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(T(x_k), T(x_{k-1})) \leq cd(x_k, x_{k-1}) \leq \dots \leq c^k d(x_1, x_0).$$

Mit der Dreiecksungleichung erhält man für alle $q \geq p$ die Abschätzung

$$d(x_q, x_p) \leq \sum_{k=p}^{q-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \left(\sum_{k=p}^{q-1} c^k \right) d(x_1, x_0).$$

Da die konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c^k$ die Cauchy-Bedingung erfüllt, ist $(x_k)_{k \geq 0}$ eine Cauchy-Folge in X . Wegen der vorausgesetzten Vollständigkeit von X existiert der Grenzwert $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ in X . Da T stetig (sogar gleichmäßig stetig) ist, gilt $T(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} Tx_k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = a$. Gilt auch $T(a') = a'$, so folgt

$$d(a, a') = d(T(a), T(a')) \leq cd(a, a').$$

Wegen $c \in (0, 1)$ ist $d(a, a') = 0$ und damit auch $a = a'$. □

Satz 8.5. (*Implizite Funktionen*) Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Umgebungen von Punkten $a \in \mathbb{R}^k$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Ist

$$F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x, y) \mapsto F(x, y)$$

stetig partiell differenzierbar mit $F(a, b) = 0$ und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \in GL(m, \mathbb{R}),$$

so gibt es offene Umgebungen $V_1 \subset U_1$ von a , $V_2 \subset U_2$ von b und eine stetige Abbildung $g : V_1 \rightarrow V_2$ mit

$$\{(x, y) \in V_1 \times V_2; F(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)); x \in V_1\}.$$

Beweis. Sei $B = \frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$. Nach der Kettenregel ist die Funktion

$$G : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m, G(x, y) = y - B^{-1}F(x, y)$$

stetig partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = I_m - B^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in U_1 \times U_2.$$

Hierbei bezeichnet I_m die $(m \times m)$ -Einheitsmatrix. Da $\frac{\partial G}{\partial y} : U_1 \times U_2 \rightarrow M(m \times m, \mathbb{R})$ stetig ist mit $\frac{\partial G}{\partial y}(a, b) = 0$, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\left\| \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \right\| < \frac{1}{2}$$

für alle $(x, y) \in \overline{B}_\delta(a) \times \overline{B}_\delta(b) \subset U_1 \times U_2$. Für $x \in \overline{B}_\delta(a)$ zeigt die Mittelwertabschätzung (Korollar 6.17) angewendet auf die Funktion $G(x, \cdot) \in C^1(U_2, \mathbb{R}^m)$, dass

$$\|G(x, y_1) - G(x, y_2)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \left\| \frac{\partial G}{\partial y}(x, y_1 + t(y_2 - y_1)) \right\| \|y_1 - y_2\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|$$

für alle $y_1, y_2 \in \overline{B}_\delta(b)$ ist. Da G stetig ist, gibt es ein $r \in (0, \delta)$ mit $\|G(x, b) - G(a, b)\| < \delta/2$ für alle $x \in \overline{B}_r(a)$. Für $x \in \overline{B}_r(a)$ und $y \in \overline{B}_\delta(b)$ gilt

$$\|G(x, y) - b\| \leq \|G(x, y) - G(x, b)\| + \|G(x, b) - G(a, b)\| < \frac{1}{2} \|y - b\| + \frac{\delta}{2} \leq \delta.$$

Der Banachsche Fixpunktsatz (Satz 8.4) angewendet auf die Abbildungen

$$G(x, \cdot) : \overline{B}_\delta(b) \rightarrow \overline{B}_\delta(b) \quad (x \in \overline{B}_r(a))$$

zeigt, dass für jedes $x \in \overline{B}_r(a)$ genau ein Vektor $y = y(x) \in \overline{B}_\delta(b)$ existiert so, dass $y = G(x, y)$ ist. Wegen $G(\overline{B}_r(a) \times \overline{B}_\delta(b)) \subset B_\delta(b)$ ist $y(x) \in B_\delta(b)$ für alle $x \in \overline{B}_r(a)$.

Wir zeigen, dass die Abbildung $g : B_r(a) \rightarrow B_\delta(b)$, $x \mapsto y(x)$ stetig ist in jedem Punkt $x_0 \in B_r(a)$. Zum Beweis beachte man, dass für $x, x_0 \in B_r(a)$ gilt

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(x_0)\| &= \|G(x, g(x)) - G(x_0, g(x_0))\| \\ &\leq \|G(x, g(x)) - G(x, g(x_0))\| + \|G(x, g(x_0)) - G(x_0, g(x_0))\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|g(x) - g(x_0)\| + \|G(x, g(x_0)) - G(x_0, g(x_0))\| \end{aligned}$$

und damit

$$\|g(x) - g(x_0)\| \leq 2 \|G(x, g(x_0)) - G(x_0, g(x_0))\| \xrightarrow{(x \rightarrow x_0)} 0.$$

Die Beobachtung, dass

$$\{(x, y) \in B_r(a) \times B_\delta(b); F(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)); x \in B_r(a)\}$$

ist, beendet den Beweis. □

Durch Verkleinern der Umgebungen V_1 von a , V_2 und b in der Situation von Satz 8.5 kann man erreichen, dass auch die Funktion g stetig partiell differenzierbar ist und sogar k -mal stetig partiell differenzierbar ist, wenn $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ als k -mal stetig partiell differenzierbar vorausgesetzt wird.

Bemerkung 8.6. Sei in der Situation von Satz 8.5 zusätzlich W eine beliebige Umgebung von (a, b) . Da g stetig ist mit $g(a) = b$, gibt es offene Umgebungen $W_1 \subset V_1$ von a , $W_2 \subset V_2$ von b mit

$$W_1 \times W_2 \subset W \text{ und } g(W_1) \subset W_2.$$

Dann gilt automatisch wieder

$$\{(x, y) \in W_1 \times W_2; F(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)); x \in W_1\}.$$

Nach Bemerkung 8.3 gibt es eine Umgebung W von (a, b) so, dass

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \in GL(m, \mathbb{R})$$

für alle $(x, y) \in W$ ist. Wählt man zu dieser Umgebung W von (a, b) die Umgebungen W_1 von a und W_2 von b wie oben, so folgt mit Satz 8.2 angewendet auf $F : W_1 \times W_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : W_1 \rightarrow W_2$ und $(x, g(x))$ statt (a, b) , dass g differenzierbar ist in jedem $x \in W_1$ mit

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = -\frac{\partial F}{\partial y}((x, g(x)))^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))$$

für alle $x \in W_1$. In der Linearen Algebra zeigt man, dass die Inverse einer invertierbaren Matrix $A \in GL(m, \mathbb{R})$ die Form

$$A^{-1} = \left((-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det A} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

hat, wobei $A_{ji} \in M((n-1) \times (n-1), \mathbb{R})$ die Matrix ist, die aus A durch Streichen der j -ten Zeile und i -ten Spalte entsteht. Mit der Definition der Determinante (vgl. Bemerkung 8.3) folgt, dass für eine matrixwertige Abbildung $A : U \rightarrow GL(m, \mathbb{R})$, $x \mapsto (a_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq m}$ über einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit Koeffizientenfunktionen $a_{ij} \in C(U)$ (bzw. $a_{ij} \in C^k(U)$) auch die durch

$$A(x)^{-1} = (b_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq m} \quad (x \in U)$$

definierten Koeffizientenfunktionen der Abbildung $A^{-1} : U \rightarrow GL(m, \mathbb{R})$, $x \mapsto A(x)^{-1}$ wieder zu $C(U)$ (bzw. zu $C^k(U)$) gehören.

Also zeigt die obige Formel für die Jacobi-Matrix $\frac{\partial g}{\partial x} = J_g$, dass alle Koeffizientenfunktionen von J_g stetig auf W_1 sind und damit $g \in C^1(W_1, \mathbb{R}^m)$ ist. Ist $F \in C^2(U_1 \times U_2, \mathbb{R}^m)$, so erhält man mit derselben Formel für $\frac{\partial g}{\partial x}$ durch Wiederholung des obigen Argumentes und Anwendung der Kettenregel (Korollar 6.10), dass $g \in C^2(W_1, \mathbb{R}^m)$ ist. Induktiv folgt, dass $g \in C^k(W_1, \mathbb{R}^m)$ ist, falls $F \in C^k(U_1 \times U_2, \mathbb{R}^m)$ ist. Ist F unendlich oft stetig partiell differenzierbar auf $U_1 \times U_2$, so folgt dasselbe für g auf W_1 .

Beispiel 8.7. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $f \in C^k(U)$ mit $k \geq 1$. Sei $c \in \mathbb{R}$ und

$$(a, b) \in N_f(c) = \{(x, y) \in U; f(x, y) = c\}$$

mit $\text{grad } f(a, b) \neq 0$. Ist $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$, so existieren nach Satz 8.5 und Bemerkung 8.6 offene Intervalle $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ mit $(a, b) \in I_1 \times I_2 \subset U$ und eine C^k -Funktion $g : I_1 \rightarrow I_2$ mit

$$N_f(c) \cap (I_1 \times I_2) = \{(x, g(x)); x \in I_1\}.$$

Ist $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$, so existiert eine C^k -Funktion $h : J_2 \rightarrow J_1$ zwischen offenen Intervallen mit $(a, b) \in J_1 \times J_2 \subset U$ und

$$N_f(c) \cap (J_1 \times J_2) = \{(h(y), y); y \in J_2\}.$$

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv und sei $A = \min f([a, b])$, $B = \max f([a, b])$. In der Analysis I zeigt man, dass die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : [A, B] \rightarrow [a, b]$ stetig ist (Satz 11.2 und Satz 11.4 in [EAI]) und dass, falls f differenzierbar ist in einem Punkt $x_0 \in [a, b]$ mit $f'(x_0) \neq 0$, die Funktion $g = f^{-1}$ differenzierbar ist in $y_0 = f(x_0)$ mit

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))} \quad (\text{Satz 14.12 in [EAI]}).$$

Ist $f : U_1 \rightarrow U_2$ bijektiv zwischen offenen Mengen $U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ mit Umkehrabbildung $g = f^{-1} : U_2 \rightarrow U_1$ und sind f, g differenzierbar, so gilt nach der Kettenregel (Satz 6.8) und Beispiel 6.3, dass

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{R}^{n_1}} &= g'(f(x)) \circ f'(x), \\ I_{\mathbb{R}^{n_2}} &= f'(g(y)) \circ g'(y) \end{aligned}$$

für alle $x \in U_1$ und $y \in U_2$ ist. Also sind die linearen Abbildungen $f'(x) : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ invertierbar für $x \in U_1$. Insbesondere gilt notwendigerweise, dass $n_1 = n_2$ ist.

Definition 8.8. Seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, $k \in \mathbb{N}^*$. Eine bijektive Abbildung $f : U_1 \rightarrow U_2$ heißt *C^k -Diffeomorphismus* oder *C^k -invertierbar*, wenn $f : U_1 \rightarrow U_2$ und $f^{-1} : U_2 \rightarrow U_1$ beide C^k -Funktionen sind (als Abbildungen mit Werten in $\mathbb{R}^n$).

Satz 8.9. (*Lokale C^k -Invertierbarkeit*) Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^k -Funktion ($1 \leq k \leq \infty$) auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und seien $a \in U$, $b = f(a)$ so, dass $f'(a)$ invertierbar ist. Dann gibt es offene Umgebungen $W \subset U$ von a , $V = V(b) \subset \mathbb{R}^n$ von b so, dass $f : W \rightarrow V$ C^k -invertierbar ist. In diesem Fall ist das Differential der Umkehrabbildung $g = f^{-1} : V \rightarrow W$ gegeben durch

$$g'(f(x)) = f'(x)^{-1} \quad (x \in W).$$

Beweis. Da die Funktion $F : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$F(x, y) = x - f(y)$$

k -mal stetig partiell differenzierbar ist mit $F(b, a) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(b, a) = -J_f(a) \in GL(n, \mathbb{R})$ zeigt der Satz über implizite Funktionen (Satz 8.6), dass offene Umgebungen V von $b, \tilde{W} \subset U$ von a und eine Funktion $g \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$ existieren mit $g(V) \subset \tilde{W}$ und

$$\{(x, y) \in V \times \tilde{W}; x = f(y)\} = \{(x, g(x)); x \in V\}.$$

Dann definiert $W = \tilde{W} \cap f^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von a mit $f(W) \subset V$ und

$$\{(x, y) \in V \times W; x = f(y)\} = \{(x, g(x)); x \in V\}.$$

Da die rechte Menge in der linken enthalten ist, gilt $g(V) \subset W$ und

$$x = f(g(x)) \text{ für alle } x \in V.$$

Da die linke Menge in der rechten enthalten ist, ist für jedes $y \in W$ das Paar $(f(y), y)$ ein Element der rechten Menge, also

$$y = g(f(y)) \text{ für alle } y \in W.$$

Folglich ist $f : W \rightarrow V$ bijektiv mit C^k -Umkehrfunktion $g : V \rightarrow W$. Die Formel für $g'(f(x))$ folgt aus den Bemerkungen vor Definition 8.8 als Anwendung der Kettenregel (Satz 6.8). $\square$

Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ in der Situation von Satz 8.9 zusätzlich injektiv und ist $f'(x)$ invertierbar für alle $x \in U$, so erhält man die globale C^k -Invertierbarkeit von f .

Korollar 8.10. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive C^k -Funktion ($1 \leq k \leq \infty$) so, dass $f'(x)$ invertierbar ist für alle $x \in U$. Dann ist die Menge $V = f(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine C^k -Funktion.

Beweis. Nach Satz 8.9 existiert für jeden Punkt $a \in U$ eine offene Umgebung $V(b) \subset \mathbb{R}^n$ von $b = f(a)$ mit $V(b) \subset f(U)$. Für $V(b)$ und g wie in Satz 8.9 ist $f^{-1}|_{V(b)} = g$ eine C^k -Funktion. $\square$

Beispiel 8.11. Die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

ist C^∞ und für alle $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ gilt

$$\det J_f(r, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r \neq 0.$$

Die Inverse der Jacobi-Matrix ist

$$J_f(r, \varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix}, \quad (r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

Nach Satz 8.9 ist f lokal C^∞ -invertierbar. Sei $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Setze

$$(x, y) = f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Dann ist $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ und $\sin \varphi = \frac{y}{r}$. Ist $g : V \rightarrow W$ eine lokale C^∞ -Umkehrfunktion mit $(r, \varphi) \in W$ wie in Satz 8.9, so gilt

$$J_g(x, y) = J_f(r, \varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

Da $f(r, \varphi) = f(r', \varphi')$ ist genau dann, wenn $r = r'$ und $\varphi - \varphi' \in 2\pi\mathbb{Z}$ ist (Korollar 13.10 in [EAI]), ist für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ die Einschränkung von f auf $\mathbb{R}_+^* \times]\varphi, \varphi + 2\pi[$ C^∞ -invertierbar nach Korollar 8.10. Ist $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, so nennt man (r, φ) die *Polarkoordinaten* von (x, y) . Für $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \neq (0, 0)$ ist

$$f^{-1}(\{(x, y)\}) = \{(r, \varphi + 2\pi k); k \in \mathbb{Z}\}.$$

Man kann den Satz über implizite Funktionen benutzen, um notwendige Bedingungen für das Vorliegen *lokaler Extrema unter Nebenbedingungen* herzuleiten.

Satz 8.12. (*Lokale Extrema unter Nebenbedingungen*)

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U)$ und $M = \{x \in U; f(x) = 0\}$. Ist $a \in M$ mit $\text{grad } f(a) \neq 0$ und ist $h \in C^1(U)$ eine Funktion, die in a ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $f = 0$ besitzt, das heißt, gibt es eine Umgebung $V \subset U$ von a mit

$$h(x) \leq h(a) \text{ für alle } x \in V \cap M \text{ (bzw. } h(x) \geq h(a) \text{ für alle } x \in V \cap M),$$

so gibt es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\text{grad } h(a) = \lambda \text{ grad } f(a)$.

Beweis. Man darf ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\partial_n f(a) \neq 0$ ist. Sonst wähle man ein $i \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\partial_i f(a) \neq 0$ und ersetze f und h durch die Funktionen

$$\tilde{f} = f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{h} = h \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R},$$

wobei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, \dots, x_i)$ die Abbildung sei, die die i -te und n -te Koordinate vertauscht. Dann hat $\tilde{h}$ ein lokales Extremum in $\varphi^{-1}(a)$ unter der Nebenbedingung $\tilde{f} = 0$ und wegen

$$\begin{aligned} \partial_n \tilde{f} &= \sum_{\nu=1}^n (\partial_\nu f) \circ \varphi (\partial_n \varphi_\nu) = (\partial_i f) \circ \varphi, \\ \text{grad } \tilde{h} &= (\partial_1 h, \dots, \partial_n h, \dots, \partial_i h) \circ \varphi, \\ \text{grad } \tilde{f} &= (\partial_1 f, \dots, \partial_n f, \dots, \partial_i f) \circ \varphi \end{aligned}$$

genügt es, den Satz für den Fall $\partial_n f(a) \neq 0$ zu beweisen.

Sei also $\partial_n f(a) \neq 0$. Wir schreiben die Elemente von $\mathbb{R}^n$ in der Form $(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Nach Bemerkung 8.6 gibt es offene Umgebungen W_1 von a' , W_2 von a_n und eine stetig partiell differenzierbare Funktion $g : W_1 \rightarrow W_2$ mit $W_1 \times W_2 \subset V$ und

$$(i) \quad M \cap (W_1 \times W_2) = \{(x', g(x'))\}; \quad x' \in W_1\},$$

$$(ii) \quad \partial_i f(x', g(x')) + \partial_n f(x', g(x')) \partial_i g(x') = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n-1, x' \in W_1.$$

Dabei folgt die Gültigkeit von (ii) durch Ableiten der Identität $0 = f(x', g(x'))$, auf W_1 mit der Kettenregel (Korollar 6.9). Die C^1 -Funktion

$$H : W_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(x') = h(x', g(x'))$$

hat in a' ein lokales Extremum. Nach Satz 7.7 ist $\text{grad } H(a') = 0$, und mit der Kettenregel (Korollar 6.9) folgt, dass

$$0 = \partial_i H(a') = \partial_i h(a) + \partial_n h(a) \partial_i g(a')$$

für $i = 1, \dots, n-1$. Mit Bedingung (ii) folgt

$$\partial_i h(a) = \partial_n h(a) (-\partial_i g(a')) = \left(\frac{\partial_n h(a)}{\partial_n f(a)} \right) \partial_i f(a)$$

für $i = 1, \dots, n$. Also folgt die Behauptung mit $\lambda = \frac{\partial_n h(a)}{\partial_n f(a)}$ des Extremalproblems. $\square$

Die Zahl λ in Satz 8.12 nennt man den *Langrange-Multiplikator*.

Wir wenden den letzten Satz an, um den größten und kleinsten Eigenwert einer symmetrischen Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit Hilfe der quadratischen Form von A zu berechnen.

Beispiel 8.13. Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Da die Einheitssphäre

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

kompakt ist und da die quadratische Form von A

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \langle Ax, x \rangle$$

stetig ist, gibt es Elemente $a^{(i)} \in S$ ($i = 1, 2$) mit

$$\langle Aa^{(1)}, a^{(1)} \rangle \leq \langle Ax, x \rangle \leq \langle Aa^{(2)}, a^{(2)} \rangle$$

für alle $x \in S$ (Korollar 3.11). Also besitzt die Funktion $h \in C^1(\mathbb{R}^n)$ in den Punkten $a^{(1)}, a^{(2)} \in S$ lokale (sogar absolute) Extrema unter der Nebenbedingung

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0.$$

Wegen $\text{grad } f(x) = 2x \neq 0$ für alle $x \in S$ folgt mit Satz 8.12, dass $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\text{grad } h(a^{(i)}) = \lambda_i \text{grad } f(a^{(i)}) = 2 \lambda_i a^{(i)} \quad (i = 1, 2).$$

Da für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle A(x + \xi), x + \xi \rangle = \langle Ax, x \rangle + \langle Ax, \xi \rangle + \langle x, A\xi \rangle + \langle A\xi, \xi \rangle = \langle Ax, x \rangle + \langle 2Ax, \xi \rangle + o(\|\xi\|),$$

ist $\text{grad } h(x) = 2Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Damit folgt, dass

$$Aa^{(i)} = \lambda_i a^{(i)} \quad (i = 1, 2)$$

und dass

$$\lambda_1 = \langle Aa^{(1)}, a^{(1)} \rangle = \min\{\langle Ax, x \rangle; x \in S\},$$

$$\lambda_2 = \langle Aa^{(2)}, a^{(2)} \rangle = \max\{\langle Ax, x \rangle; x \in S\}.$$

Ist λ irgendein Eigenwert von A , so gibt es einen Vektor $x \in S$ mit $Ax = \lambda x$. Wegen $\langle Ax, x \rangle = \lambda$ sind λ_1 und λ_2 der kleinste und größte Eigenwert von A .

Literatur

[EAI] Eschmeier, J., Analysis I, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2013.